

Simulations numériques de convection turbulente à grand rapport d'aspect

There is a need for numerical simulations at the scale of supergranulation [...] This is probably feasible with present day computers and numerical methods.

Å. Nordlund, Solar Physics, Oct. 1985

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons analysé les résultats d'un modèle linéaire de convection à grande échelle. L'hypothèse essentielle de cette étude était que le mouvement aux grandes échelles pouvait être approximé correctement par un formalisme linéaire, en supposant que les petites échelles se comportaient essentiellement comme des diffuseurs turbulents. Notons au passage que dans ce modèle simplifié de supergranulation, nous nous sommes concentrés sur une modélisation de couche mince, et que nous n'avons pas pris en compte divers degrés d'ionisation à différentes profondeurs, contrairement à l'explication historique de la supergranulation.

Pour aller plus loin que cette modélisation à l'ordre zéro, il est nécessaire de passer à des simulations numériques directes d'écoulements convectifs à grande échelle, similaires à celles présentées au chapitre 1. Une telle approche a plusieurs avantages. Elle offre un cadre physique plus réaliste que le modèle linéaire, car elle intègre rigoureusement les interactions entre un grand nombre de modes. L'incorporation de la stratification en densité dans ce modèle est également réalisable, à quelques difficultés numériques près (voir annexe A).

Notre approche a été similaire à celle utilisée par Cattaneo et al. (1991, 2001). Pour cela, nous avons eu recours à BALAÏTOUS, le code de simulations numé-

riques directes de l'équipe de dynamique des fluides de Toulouse, qui est présenté extensivement en annexe A. Nous avons pour la première fois simulé un écoulement convectif turbulent compressible (polytropique) *sans champ magnétique* dans un domaine cartésien (il s'agit donc d'une simulation locale) de rapport d'aspect $A = 42.6$. Cette valeur permet tout particulièrement de combler le vide existant entre les simulations globales et les simulations locales réalisées jusqu'à présent (chapitre 1) et d'autoriser simultanément le développement d'échelles supergranulaires et granulaires en dehors de la zone de dissipation. La prise en compte de la stratification en densité par le biais d'un profil polytropique permet d'obtenir un modèle plus satisfaisant d'atmosphère stellaire qu'une simulation de type Boussinesq comme celle de Cattaneo et al. (2001), et également d'atténuer les effets d'une condition aux limites de type paroi. Finalement, la présence du champ magnétique ajoute une complexité considérable de tous points de vue (numérique et théorique) et nous avons estimé qu'il était préférable de ne pas l'inclure dans un premier temps.

Les résultats de la simulation fournissent de nombreux renseignements sur la nature des interactions non-linéaires entre échelles très différentes pouvant simultanément être résolues numériquement. Nous tenterons en particulier de répondre aux questions suivantes. Quelles sont les propriétés qualitatives, statistiques et spectrales de l'écoulement observé lorsqu'on lui laisse « de la place » horizontalement ? Peut-on mettre en évidence des interactions collectives entre petites échelles, comme il a été suggéré par Cattaneo et al. (2001) ?

Nous nous demanderons ensuite dans quelle mesure les structures observées dans la simulation peuvent être reliées aux structures visibles dans la photosphère solaire. Nous tenterons d'identifier les mécanismes responsables de la formation de structures d'échelles différentes dans la simulation et de les rattacher dans la mesure du possible aux mécanismes à l'œuvre dans la photosphère. Pour cela, nous présenterons une comparaison avec des simulations de convection radiative à grand rapport d'aspect réalisées par Rieutord et al. (2002), qui utilisent un modèle plus réaliste que le polytrophe à proximité de la surface.

Nous essaierons finalement de tirer les conclusions de cette expérience pour le problème des relations entre granulation, mésogranulation et supergranulation. Les résultats obtenus peuvent-ils en particulier nous aider à savoir si la supergranulation est issue d'un mécanisme non-linéaire agissant à la surface solaire (*via* une instabilité à grande échelle de la granulation) ou si son existence repose sur d'autres phénomènes physiques ?

Ce travail a été réalisé en collaboration étroite avec François Lignières. Il a été discuté à plusieurs reprises avec notamment Michael Proctor, Nigel Weiss et Bernd Freytag, que je souhaite tout particulièrement remercier ici.

4.2 La simulation

4.2.a Paramètres physiques et numériques

Les notations employées ici sont celles des chapitres 2 et de l'annexe A. Les paramètres de la simulation sont les suivants : le rapport d'aspect vaut $A = 42.6$, l'index polytropique est $m = 1$ (stratification instable). Une stratification initiale $z_o = 0.5$ est appliquée, correspondant à un contraste de densité $\rho_b/\rho_t = 3$ entre le bas et le haut (la surface) de la couche. Le nombre de Prandtl est $Pr = 0.3$, et le nombre de Rayleigh est $R = 3 \cdot 10^5$. Dans cette configuration, on trouve alors $\Lambda = 1.012 \cdot 10^6$ et $C_k = 1.4 \cdot 10^{-3}$. Au profil thermodynamique initial, on ajoute comme conditions initiales des perturbations aléatoires de vitesse, densité et température.

Les conditions aux limites sont stress-free et impénétrables pour la vitesse sur les deux parois. Une température $z_o = 0.5$ constante est imposée au niveau de la plaque supérieure, tandis qu'un flux thermique constant $(\gamma \Lambda)/((\gamma - 1)(m + 1))$, correspondant à un gradient de température de -1 dans le système d'unités choisi, est imposé en bas de la couche (cf. équation (2.13), chapitre 2). Avec ces conditions aux limites, les paramètres physiques du modèle et le nombre de Rayleigh choisi, la configuration est approximativement 640 fois supercritique du point de vue de l'instabilité convective.

La résolution utilisée pour atteindre ce rapport d'aspect est $1024 \times 1024 \times 82$ (1024 points dans chaque direction horizontale). Le schéma compact d'ordre 6 est utilisé dans la direction verticale, un dealiasing coupant le dernier tiers des modes de Fourier horizontaux est appliqué à chaque pas de temps. L'avancement en temps est réalisé avec le schéma complètement explicite de Runge-Kutta d'ordre 3. Aucune hyperviscosité n'est ajoutée. Cette simulation a été réalisée sur 64 processeurs Power 4 cadencés à 1.7 GHz de l'IBM SP4 de l'IDRIS. Elle a nécessité 60 000 heures de calcul et a produit plus de 400 Go de données.

4.2.b Commentaires

La stratification en densité appliquée n'est pas très importante dans cette expérience. En raison du choix d'une viscosité dynamique et d'une conductivité thermique constantes, imposer de très faibles densités en surface revient à augmenter considérablement la diffusion dans ces couches et donc à diminuer fortement les pas de temps correspondants. Le choix d'une stratification modeste a donc été fait pour éviter ce genre de désagréments qui auraient rendu le calcul prohibitif. Cependant, pour le contraste de densité choisi, on observe déjà une bonne partie des effets de la compressibilité dans le problème linéaire de l'instabilité convective (voir par exemple la figure 3.5, chapitre 3 : $Q = 0$ et $1/z_o = 2$ correspond à la région de transition entre le régime incompressible et le régime infiniment stratifié), si bien que l'on peut espérer capturer une bonne partie des effets de la stratification en densité avec cette valeur.

La combinaison $R = 3 \cdot 10^5$, $Pr = 0.3$ provient de simulations de Cattaneo et al. (1991) avec un rapport d'aspect $A = 6$. Dans cette étude les auteurs considéraient que ce jeu de paramètres était le minimum requis pour obtenir un écoulement présentant un début de loi de puissance pour les spectres.

Remarquons également que pour les paramètres choisis, les pas de temps requis pour résoudre les ondes sonores et la diffusion sont du même ordre de grandeur. L'utilisation d'un schéma implicite sur la diffusion dans ce cas est donc d'un intérêt limité, puisque c'est la condition CFL qui détermine de toute façon le pas de temps.

4.2.c Définition des spectres

Dans ce chapitre, il sera à de nombreuses occasions question de spectres turbulents. Nous définissons donc de la manière suivante le spectre pour la quantité de mouvement $E(k, z)$ et pour la température $E_\theta(k, z)$:

$$E(k, z) = \int_{\Omega_k} \left| \widehat{(\rho v)}_k(z) \right|^2 k \, d\Omega_k \quad (4.1)$$

et

$$E_\theta(k, z) = \int_{\Omega_k} \left| \widehat{T}_k(z) \right|^2 k \, d\Omega_k. \quad (4.2)$$

Le chapeau signifie qu'on a pris la transformée de Fourier 2D horizontale des champs et $d\Omega_k$ correspond à l'intégration sur les angles des vecteurs d'onde k dans le plan horizontal. Ces spectres dépendent de la profondeur. On peut alors définir les spectres intégrés $E(k) = \int_0^1 E(k, z) dz$ et $E_\theta(k) = \int_0^1 E_\theta(k, z) dz$ (noter que sur certaines figures, ces dernière notations sont utilisées pour désigner $E(k, z)$ et $E_\theta(k, z)$). Dans tout ce qui suit, les vecteurs d'onde horizontaux sont normalisés par rapport au plus petit vecteur d'onde de la boîte $k_{\min} = 2\pi/A$ et sont donc entiers. Le mode $k = 1$ est la composante à plus grande échelle, tandis que $k = 42$ correspond à une longueur d'onde à peu près égale à l'épaisseur du domaine de simulation.

4.3 Description de l'écoulement

Nous allons à présent décrire l'évolution temporelle de la simulation et la structure de la convection. L'ensemble de l'expérience couvre 0.7 temps de relaxation thermique vertical (basé sur la valeur de la diffusivité en bas de la couche), ce qui correspond à environ douze temps de retournement de la convection. Dans toute la suite les cartes de couleurs sont établies avec une échelle linéaire. Celles-ci sont telles que la valeur de la quantité représentée est plus élevée que la valeur moyenne dans les zones claires et plus faible que la valeur moyenne dans les zones sombres.

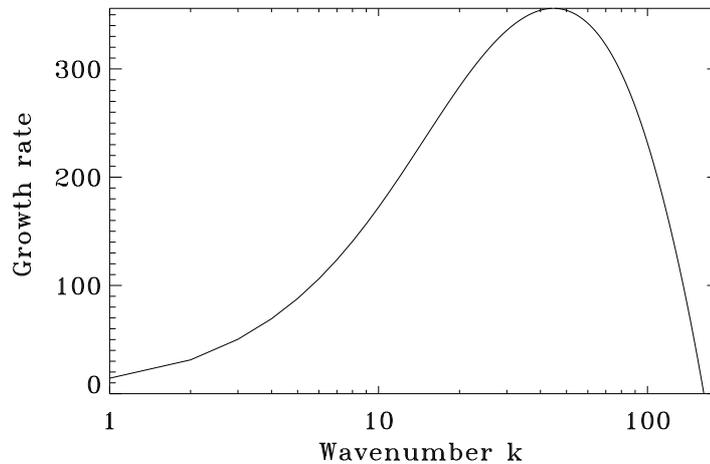


FIG. 4.1 – Taux de croissance Γ de l'instabilité convective dans le régime linéaire, pour tous les modes possibles dans une couche de rapport d'aspect $A = 42.6$ et pour les paramètres et les conditions aux limites donnés au paragraphe 4.2.a.

4.3.a Évolution temporelle

Croissance linéaire

Initialement, les perturbations introduites sont petites et on s'attend à observer la croissance linéaire du mode le plus instable de la boîte. Les taux de croissance de l'instabilité en fonction du vecteur d'onde pour les paramètres physiques de cette simulation sont représentés sur la figure 4.1. Le plus instable d'entre eux est le mode $k = 45$. On observe effectivement l'apparition de cellules correspondant à ce vecteur d'onde au début de la simulation, comme le montre la carte de température de la figure 4.2 et le spectre correspondant figure 4.3. Le mode $k = 45$ correspond à une longueur d'onde $\lambda = 0.95$ (cellules de taille horizontale à peu près égale à l'épaisseur du domaine de simulation).

Tous les modes avec $k < 163$ sont instables. Les modes à grande échelle $k < 7$ ont pour leur part des taux de croissance suffisants pour croître sur une échelle de temps similaire au temps de relaxation thermique dans la direction verticale.

Évolution non-linéaire

Après que la saturation non-linéaire est atteinte pour le mode le plus instable linéairement, une évolution nette de l'échelle qui domine le spectre énergétique-

Champ de température

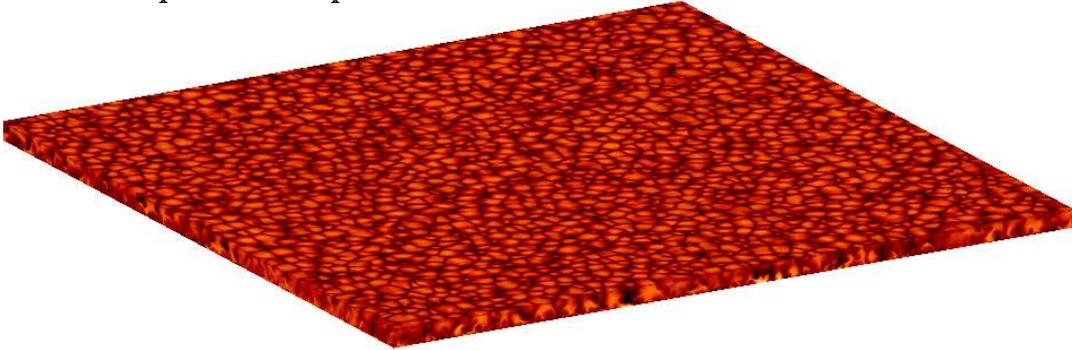


FIG. 4.2 – Carte des perturbations de température observées près de la surface ($z = 0.87$) et sur deux tranches latérales, pendant la phase de croissance linéaire ($t = 0.032$). Le motif visible correspond à un vecteur d'onde caractéristique $k = 45$. Le rapport d'aspect de la représentation correspond à celui de la simulation.

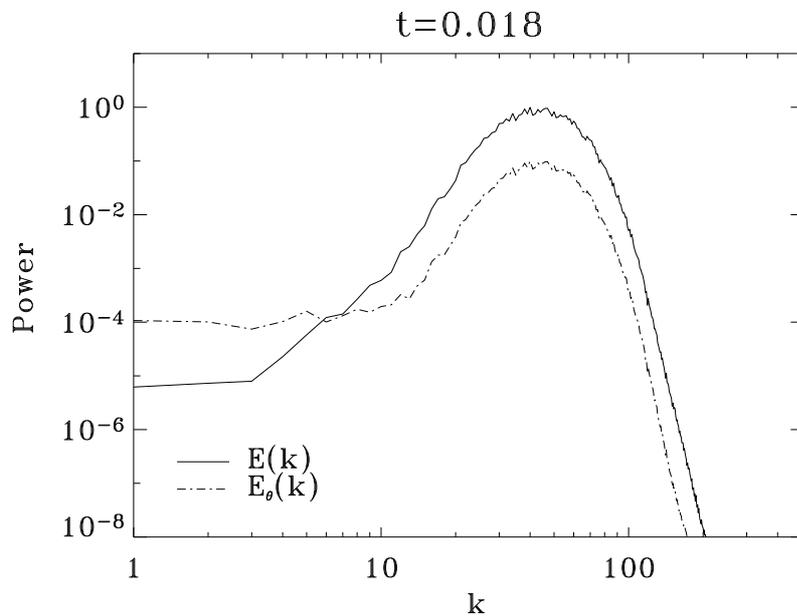


FIG. 4.3 – Spectre de la quantité de mouvement et de la température près de la surface ($z = 0.87$) pendant la phase de croissance linéaire ($t = 0.018$ ici).

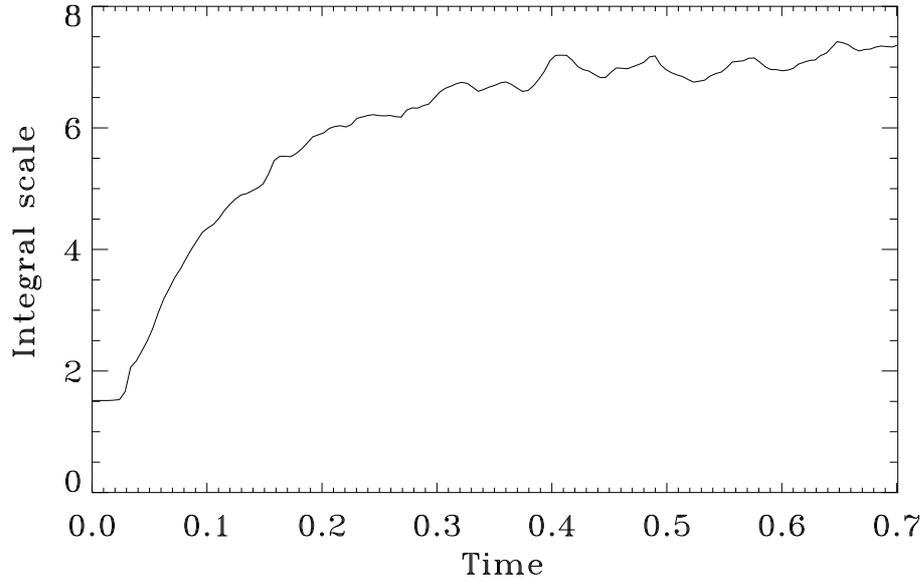


FIG. 4.4 – Évolution temporelle de l'échelle intégrale (à l'altitude $z = 0.87$), donnée par l'équation (4.3). Une valeur quasi-stationnaire $L_{\text{int}} \sim 7$ est atteinte pour $t > 0.4$.

ment est observée. On constate en effet que l'échelle intégrale

$$L_{\text{int}}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{2/3 k_{\text{max}}} k^{-1} E(k, z) dk}{\int_0^{2/3 k_{\text{max}}} E(k, z) dk} \quad (4.3)$$

croît sensiblement (figure 4.4). La dynamique spectrale de cette croissance sera analysée de manière détaillée au paragraphe 4.4.b. Notons simplement pour le moment que les taux de croissance effectifs des modes à grande échelle $\Gamma_{\text{eff}}(k) = 1/2 d \ln E(k) / dt$ sont fortement réduits (figure 4.5) comparativement à leur valeur dans le régime linéaire (figure 4.1). L'énergie des modes avec $k > 45$ est quant à elle pratiquement constante aux temps longs (figure 4.6).

On peut observer visuellement la croissance des échelles dominant les spectres sur la figure 4.7, sur laquelle on a représenté pour quatre temps différents une carte des perturbations de température au milieu de la couche de convection. On voit très clairement que les cellules ont une taille de plus en plus importante, de la croissance linéaire jusqu'à la phase de saturation. Le phénomène de développement des grandes échelles est également très apparent sur les spectres de température et de quantité de mouvement pris à une profondeur fixée (figure 4.8).

On peut finalement s'intéresser à l'évolution de l'apparence visuelle du profil vertical de la convection au cours du temps, en regardant une coupe verticale des perturbations de température (figure 4.9). Les structures dominantes cor-

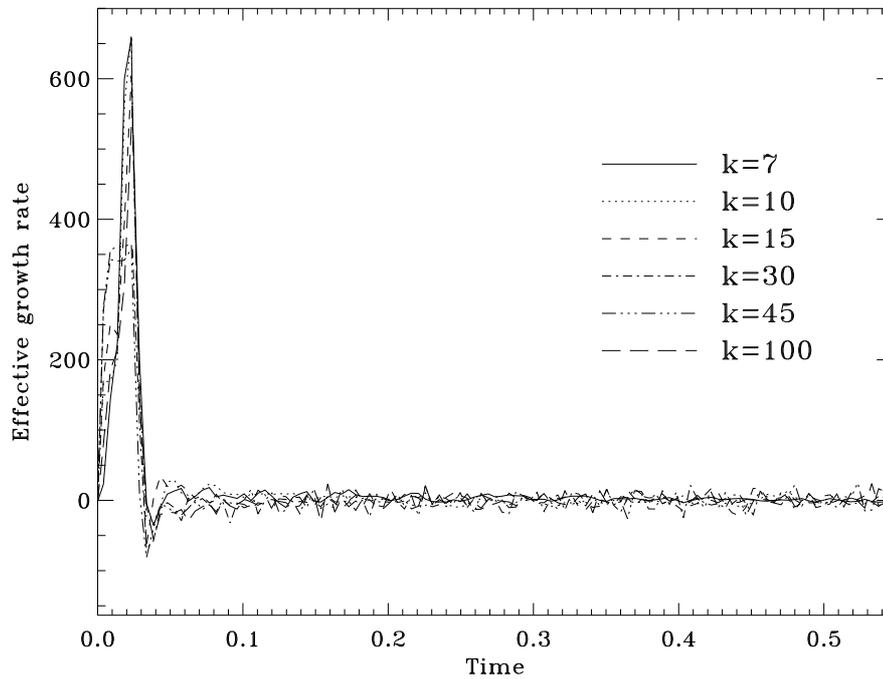


FIG. 4.5 – Évolution des taux de croissances effectifs $\Gamma_{\text{eff}} = 1/2 \, d \ln E(k) / dt$ pour différents vecteurs d'onde.

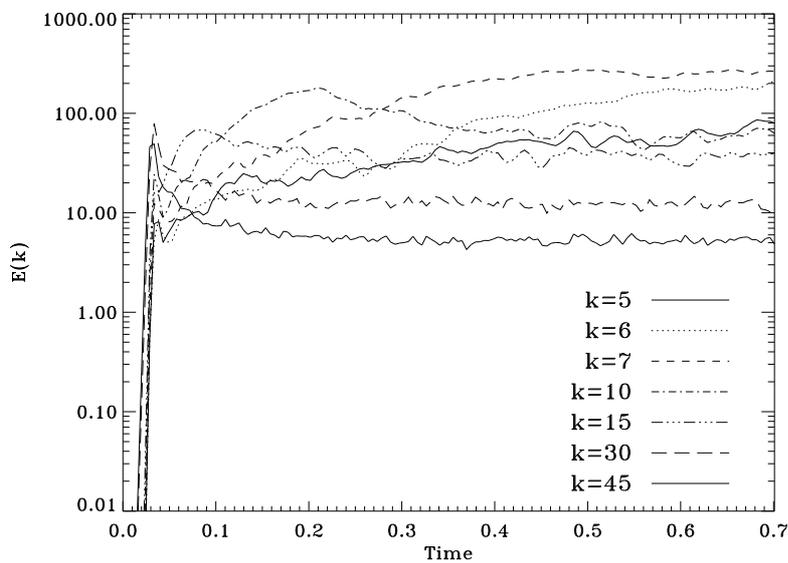


FIG. 4.6 – Évolution de $E(k)$ pour plusieurs k . Les modes avec $k > 20$ sont stationnaires très rapidement après la phase de croissance linéaire, tandis que les modes à grande échelle croissent sur des échelles de temps plus longues.

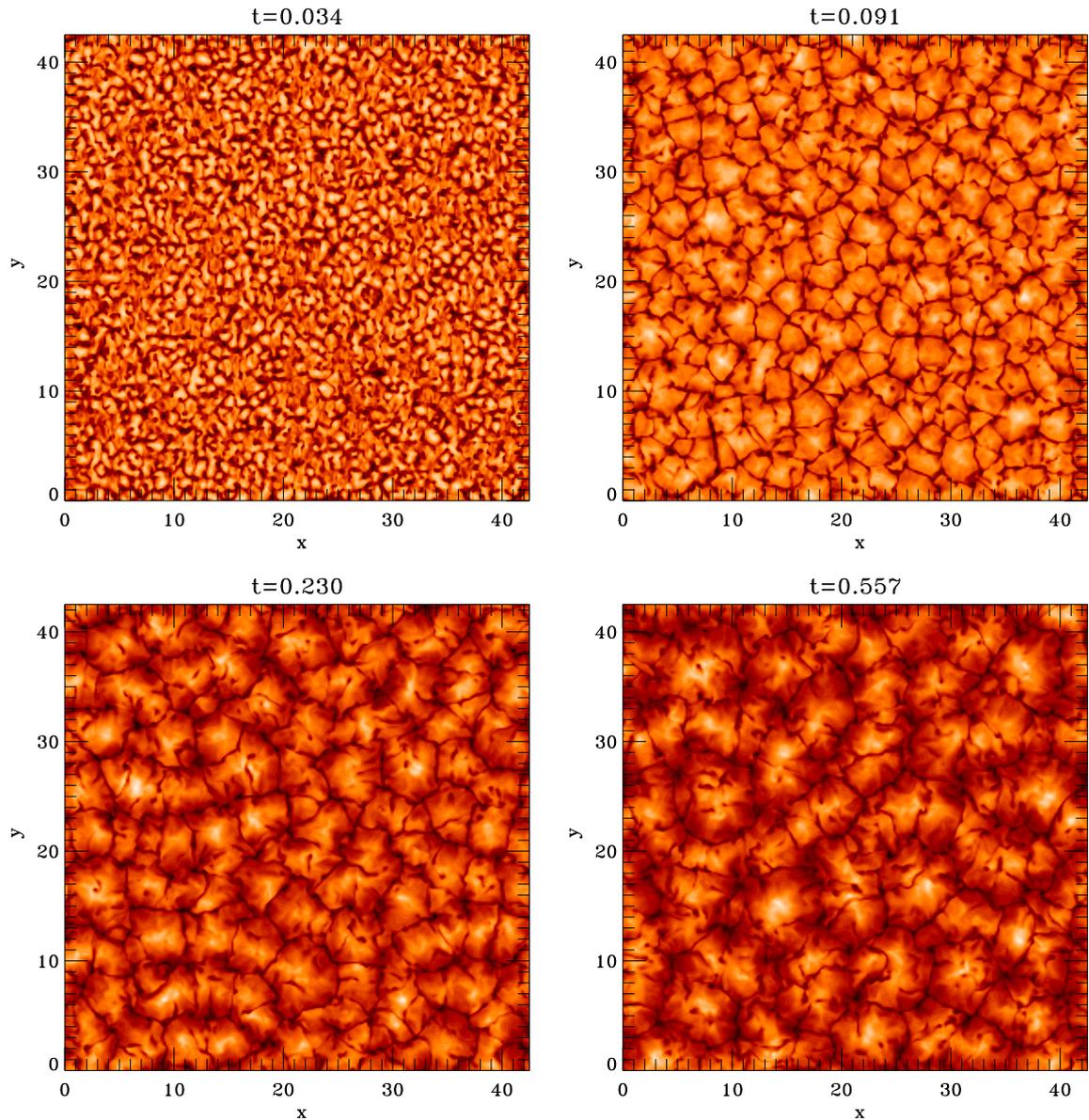


FIG. 4.7 – De gauche à droite et de haut en bas, évolution temporelle des cartes de température prises près du milieu de la zone convective ($z = 0.63$). La taille caractéristique des cellules visibles à cette profondeur augmente progressivement et sature à une mésoéchelle $L \sim 7$.

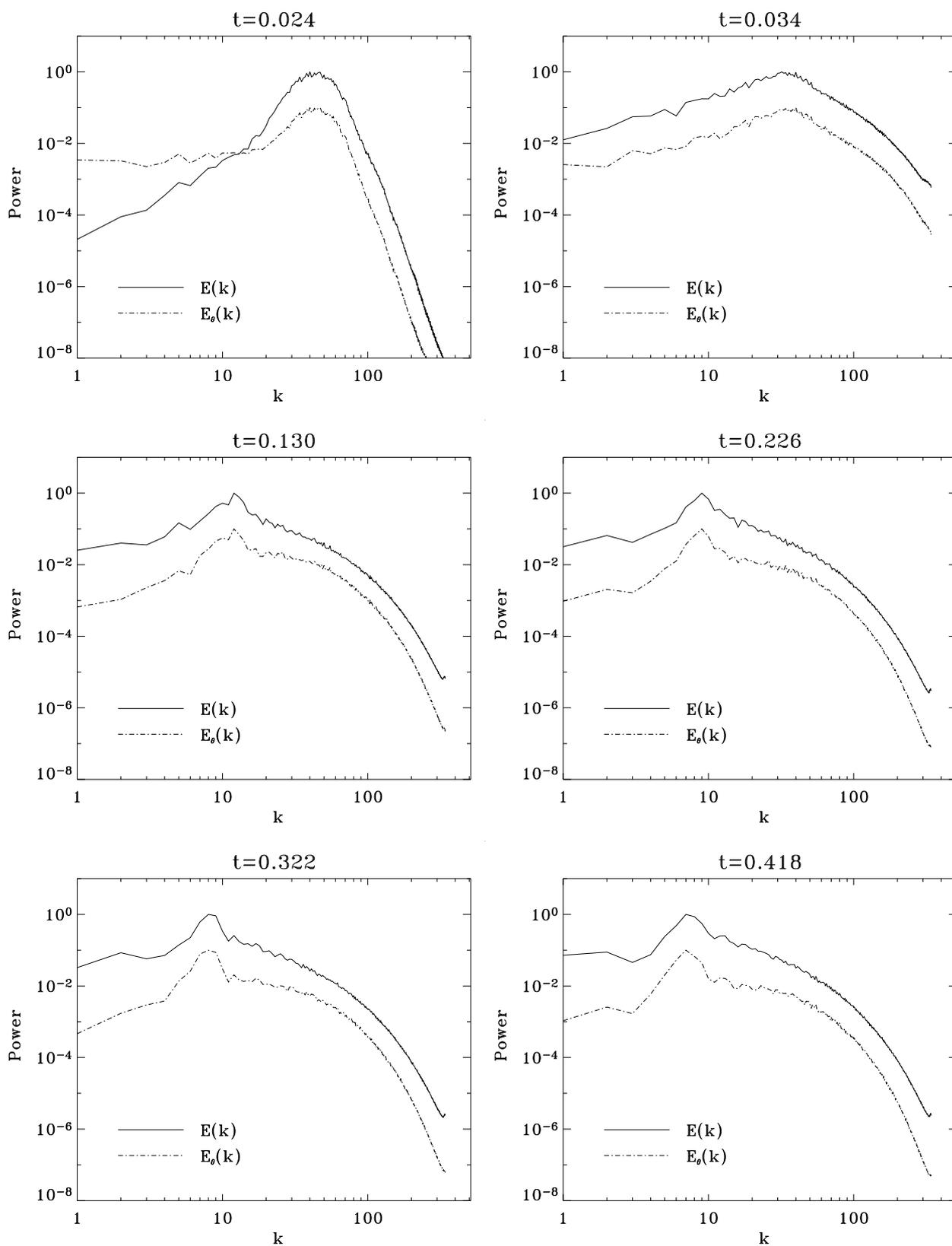


FIG. 4.8 – De gauche à droite et de haut en bas, spectres de température et de quantité de mouvement à différents temps pour $z = 0.87$, mettant en évidence la croissance progressive de l'échelle d'injection dans le régime non-linéaire.

respondent à des panaches convectifs froids (sombres) descendants intenses qui s'étendent sur toute l'épaisseur de la couche. Ces panaches s'identifient aux cellules visibles sur la figure 4.7. Comme le montrent l'ensemble des figures précédentes, ces panaches ont tendance à s'organiser sur des échelles spatiales horizontales de plus en plus grandes et, de par leur intensité, ils structurent fortement la forme de l'écoulement aux différentes profondeurs. On peut également remarquer, en anticipant les paragraphes suivants, la présence de nombreux panaches descendants de petite taille sous la surface, qui sont générés dans la couche limite thermique.

4.3.b Régime quasi-stationnaire

Comportement à différentes profondeurs

Au-delà de l'analyse de l'évolution temporelle de l'écoulement, la figure 4.9 recèle de nombreuses informations sur l'organisation en profondeur de la convection compressible, que nous allons maintenant analyser. En complément de cette représentation nous utiliserons également la figure 4.10. Une telle description existe en partie dans la littérature pour des simulations à plus faible rapport d'aspect (Toomre et al. 1990, Cattaneo et al. 1991) et nous insisterons ici sur les points les plus intéressants du point de vue du problème posé, à savoir l'apparence de la surface et la structuration des grandes échelles.

En surface, on observe une structure « granulaire » très nette, qui correspond à une couche limite thermique. Cette structure correspond aux panaches peu profonds observés auparavant dans les coupes verticales de la figure 4.9. La vorticité à proximité de la surface est principalement verticale en raison des conditions aux limites de vitesse choisies. La divergence horizontale du champ de vitesse exhibe quant à elle une apparence proche de la carte de température.

On peut voir que la structure de la convection au bas de la couche est complètement différente de celle en haut. Près de la plaque inférieure, les fluctuations de température se concentrent sur un réseau de points brillants correspondant à l'écoulement montant aux mésoéchelles identifiées sur la figure 4.7. La différence haut/bas est principalement due à l'asymétrie crée par la stratification en densité, qui impose des écoulements descendants plus vigoureux et une largeur caractéristique plus petite que celle des panaches ascendants. Pour des simulations de type Boussinesq, on observerait au contraire le même motif au niveau des deux plaques, à un déphasage près (phénomène de dualité). On pourrait penser que la différence de comportement entre le haut et le bas de la couche dans ce type de simulation est lié au fait que la viscosité cinématique varie de manière importante avec la profondeur, mais Toomre et al. (1990) ont montré qu'un comportement similaire était observé pour des simulations utilisant la méthode PPM de Porter et Woodward (1994), qui offre semble-t-il une viscosité cinématique constante.

Dans les couches intermédiaires, une disparition progressive de l'échelle granulaire et l'apparition du motif mésoéchelle sont observées. En revanche, il est frappant de constater que dans les couches du milieu, si la température revêt une

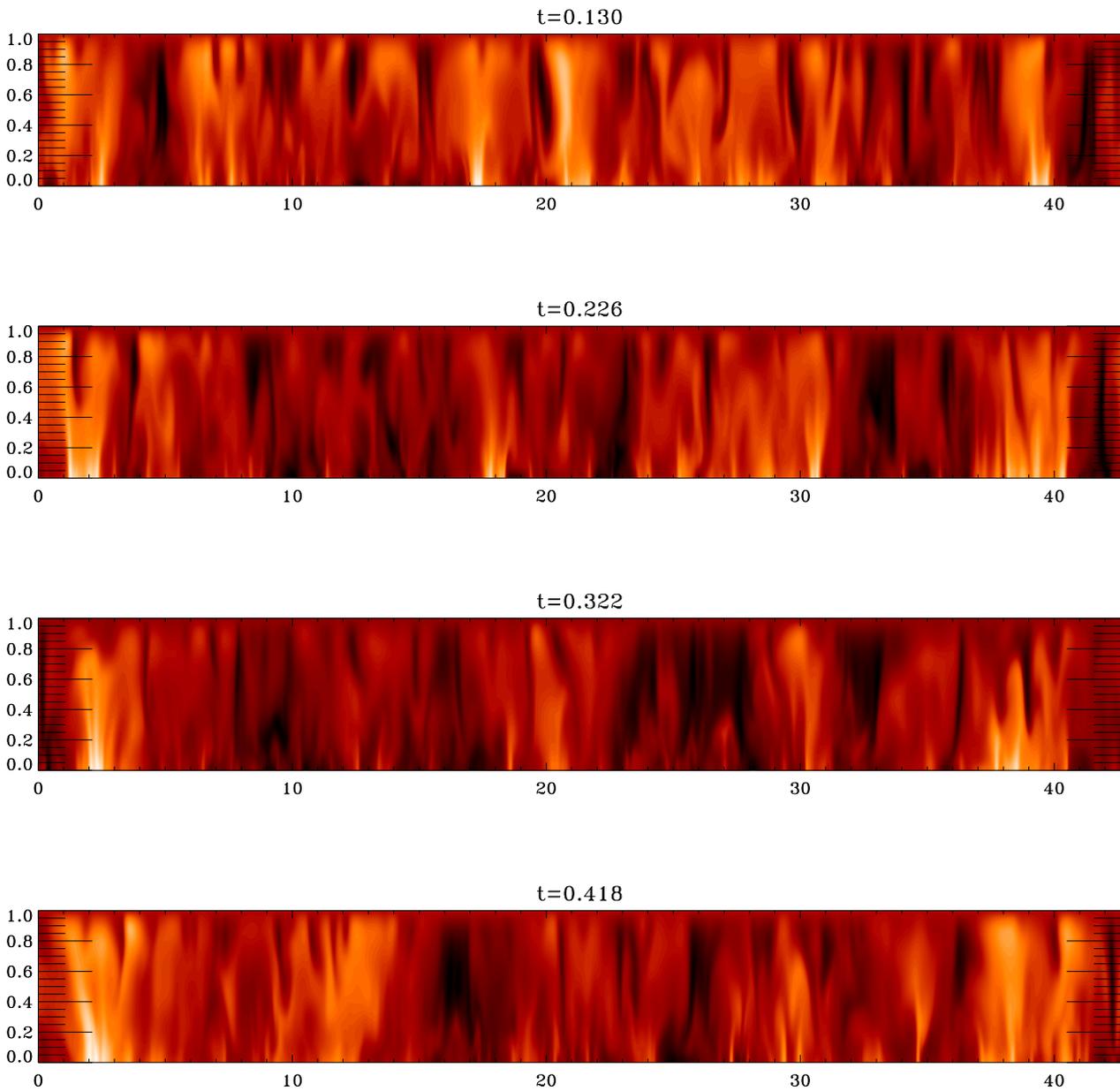


FIG. 4.9 – De haut en bas, évolution temporelle des perturbations de température au travers de la zone convective pour une abscisse x fixée (le rapport d'aspect de la figure diffère du rapport d'aspect réel de la simulation, la coupe ayant été comprimée dans la direction horizontale). Les panaches descendants, présents sur toute l'épaisseur de la couche, s'organisent sur des échelles horizontales de plus en plus grandes au cours du temps. De nombreux petits panaches sont également visibles sous la surface.

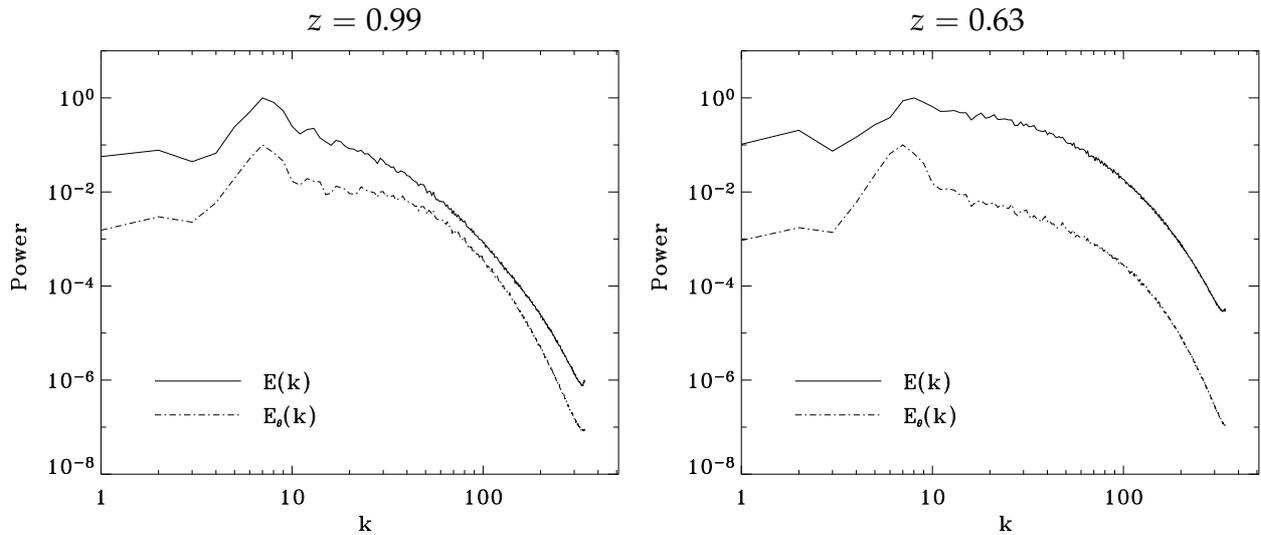


FIG. 4.11 – Spectres de température et de vitesse près de la surface (à gauche) et près du milieu de la couche. Seul le spectre de vitesse remonte aux échelles $k \sim 40$ en profondeur, ce qui était apparent sur les représentations de la figure 4.10.

apparence assez douce, le champ de vitesse et la vorticité exhibent des structures nettement plus petites. Cet effet est visible sur les spectres de la figure 4.11. Le spectre de la quantité de mouvement, contrairement au spectre de température, possède une grosse « bosse » au milieu de la couche, centrée sur des échelles correspondant à peu près à la profondeur de la boîte. Comme ce comportement se retrouve dans des simulations réalisées avec un nombre de Prandtl de 1, il s'agit plus probablement d'une différence de comportement entre la cascade hydrodynamique et la cascade de température.

La couche limite thermique

- **Dissipation des fluctuations thermiques et granules.** L'apparition de motifs granulaires en surface (jusqu'à $z = 0.8$, soit 20 % de la profondeur de la couche), comme nous l'avons mentionné auparavant, est liée à une couche limite thermique. La figure 4.12 illustre clairement la différence entre le motif de surface et en profondeur, à l'échelle de la simulation complète. Pour quantifier cet effet, il est possible de calculer le taux moyen de dissipation des fluctuations thermiques θ ,

$$\bar{N}(z) = \sum_i \overline{\kappa (\partial_i \theta)^2}, \quad (4.4)$$

en fonction de la profondeur (figure 4.13). Au contact avec la plaque supérieure, qui est thermiquement conductrice, de forts gradients verticaux de température sont présents, si bien que la dissipation des fluctuations de température y est beaucoup plus efficace qu'au centre de la couche. En revanche, au bas de la zone,

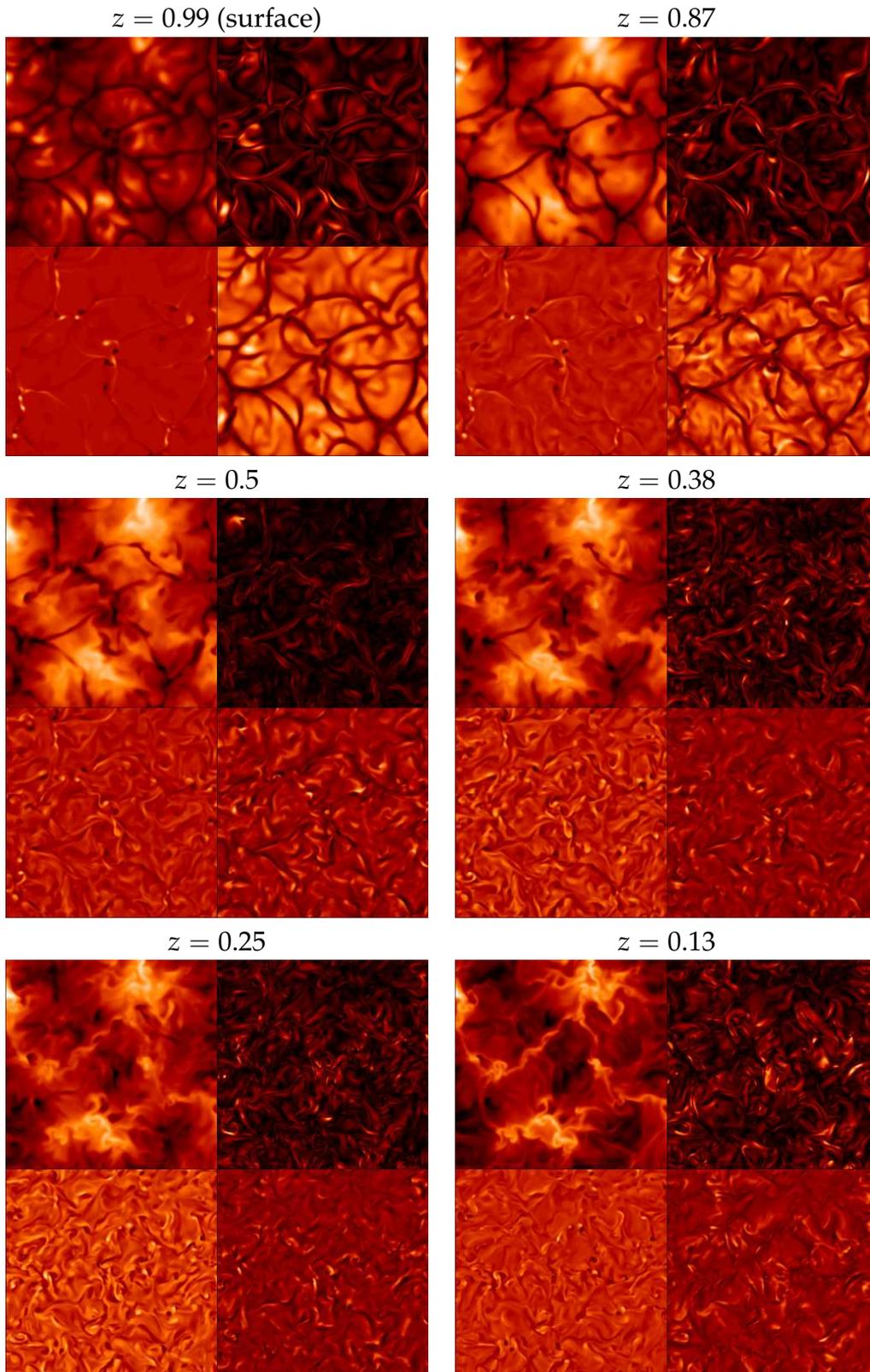


FIG. 4.10 – De haut en bas et de gauche à droite, évolution de diverses quantités physiques avec la profondeur, pour un morceau du plan de taille 10×10 . Pour chaque mosaïque, on a représenté dans le quart supérieur gauche les perturbations de température, dans le quart supérieur droit la norme de la vorticité horizontale, dans le quart inférieur gauche la norme de la vorticité verticale, et dans le quart inférieur droit la valeur de la divergence horizontale de l'écoulement à la profondeur spécifiée.

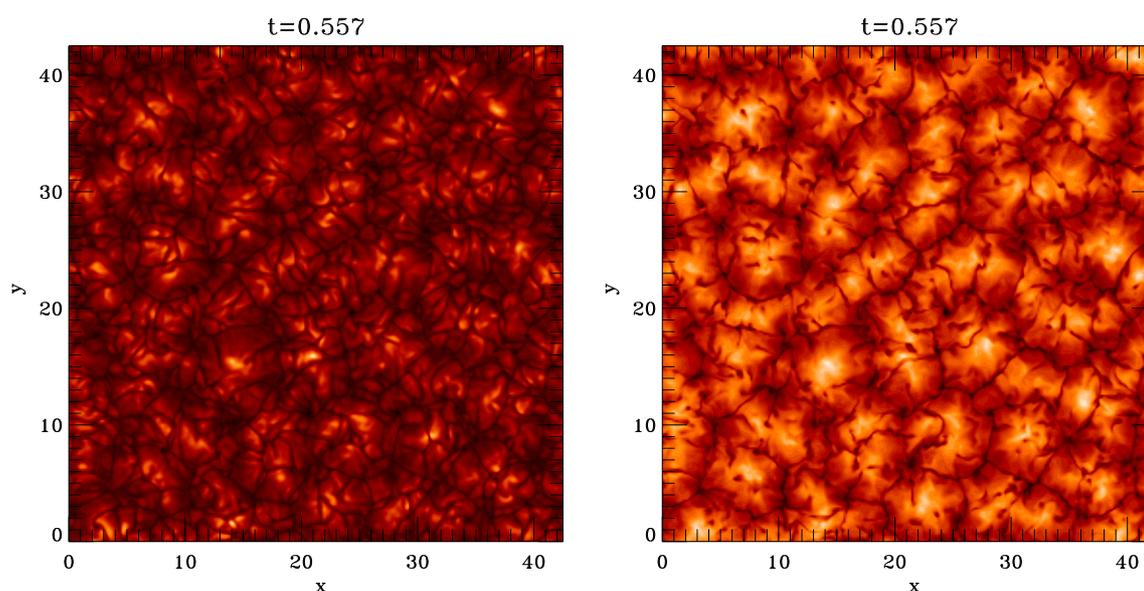


FIG. 4.12 – Comparaison entre une carte des fluctuations de température pour une couche superficielle ($z = 0.99$, à gauche) et une couche en profondeur ($z = 0.63$, à droite). La mésoéchelle est visible sur les deux représentations tandis que la petite échelle granulaire se forme uniquement à proximité de la surface.

où la dérivée verticale des perturbations de température est fixée à zéro, il n'y a pas de formation de couche limite de température.

- **D'autres conditions aux limites.** Nous avons étudié l'effet de la condition aux limites de température en réalisant deux simulations à rapport d'aspect 10 (résolution $256 \times 256 \times 82$) sur l'Origin 3800 du CINES, avec une stratification plus forte $z_0 = 0.1$, $Pr = 1$ et $R = 10^5$. Dans la première simulation, le flux est fixé en bas et la température en haut (cas identique à la grande simulation). Dans le deuxième cas, le flux est fixé au niveau des deux plaques. Les profils de \bar{N} correspondants sont donnés figure 4.14.

L'apparence visuelle de la convection en surface est modifiée par cet effet, les fluctuations à l'échelle granulaire étant plus importantes dans le cas où la température est fixée (figure 4.15). Dans le cas du flux fixé, la mésoéchelle ressort de manière plus prononcée près de la surface, alors qu'elle se mélange aux granules dans le cas de la température fixée.

Il ressort de cette analyse que l'apparence visuelle des zones superficielles est fortement dépendante de la condition aux limites de température choisie et qu'une condition de type température fixée aboutit à la formation d'une « couverture » qui masque plus efficacement la dynamique dans les zones profondes. Cette remarque doit être gardée en mémoire en prévision de la comparaison de la

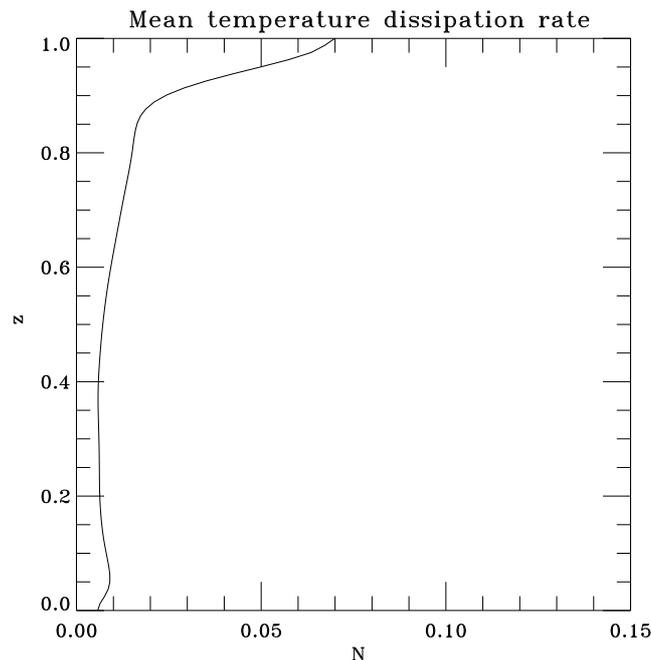


FIG. 4.13 – Taux de dissipation thermique \bar{N} donné par l'équation (4.4) en fonction de l'altitude z .

simulation avec des simulations avec radiation utilisant des profils d'opacité plus réalistes (paragraphe 4.5.a) et de la discussion sur l'extrapolation des résultats de l'expérience numérique à la physique de la photosphère (paragraphe 4.5.b). Une autre remarque est qu'il faut toujours être méticuleux lors de l'analyse des résultats de ce type de simulations, car les conditions aux limites peuvent influencer significativement l'interprétation.

Caractéristiques de la turbulence

Ce paragraphe est destiné à donner une idée du régime de turbulence simulé dans notre expérience. Dans le régime quasi-stationnaire, le nombre de Reynolds

$$\text{Re}(z) = \frac{v_{\text{r.m.s.}}}{\text{Pr}}, \quad (4.5)$$

basé sur la vitesse r.m.s à l'altitude z et l'épaisseur de la couche, est proche de 120 près de la plaque supérieure (où la viscosité est la plus importante), et de 450 au niveau de la plaque du bas (figure 4.16 et 4.17).

Le nombre de Nusselt, calculé à partir de l'équation (2.17), est proche de 5, ce qui situe la simulation dans un régime de turbulence plutôt « molle », si l'on se réfère à la classification donnée par exemple dans le travail de Heslot et al. (1987), dont une illustration est reproduite figure 4.18.

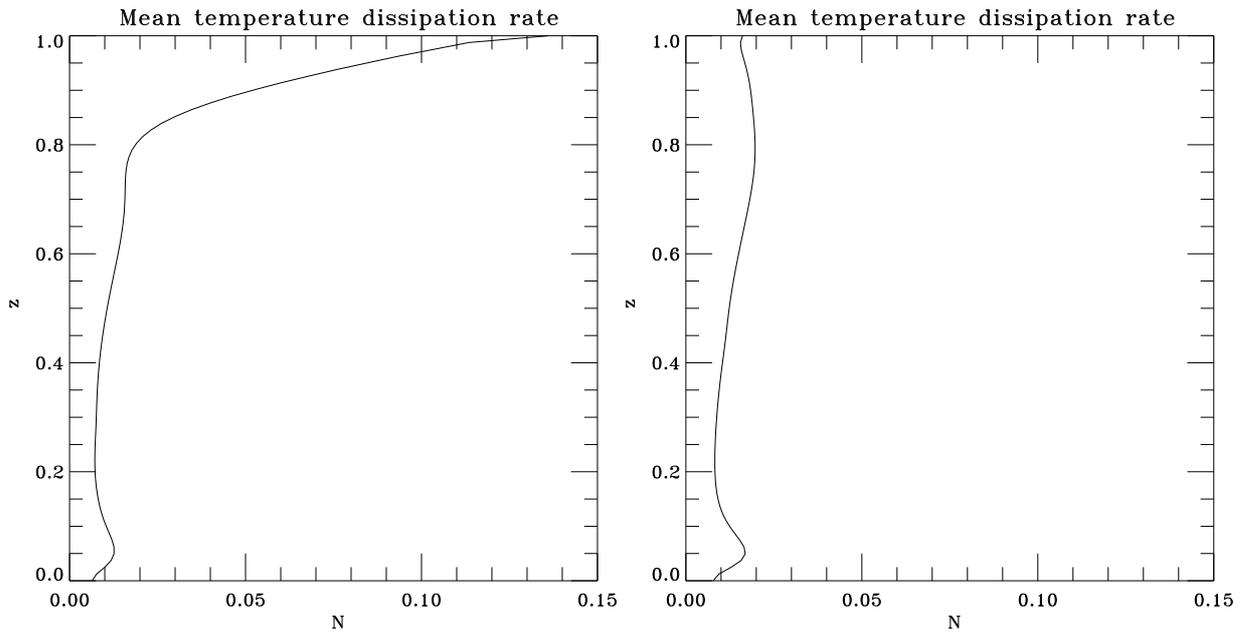


FIG. 4.14 – Comparaison entre le taux de dissipation des fluctuations thermiques au travers d'une couche de rapport d'aspect $A = 10$ fortement stratifiée ($z_o = 0.1$, $Pr = 1$, $R = 10^5$, $m = 1$) pour une condition aux limites supérieure de type température fixée (à gauche) et une condition aux limites de type flux thermique fixé (à droite). Dans les deux cas, le flux thermique est fixé en bas.

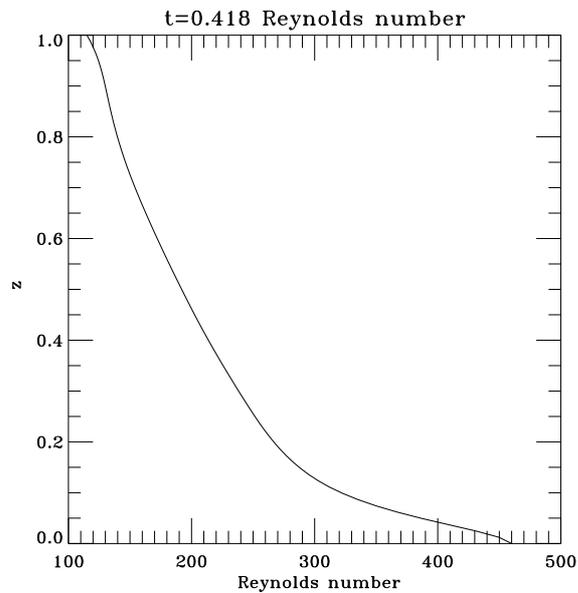


FIG. 4.16 – Profil vertical du nombre de Reynolds r.m.s. donné par l'équation (4.5).

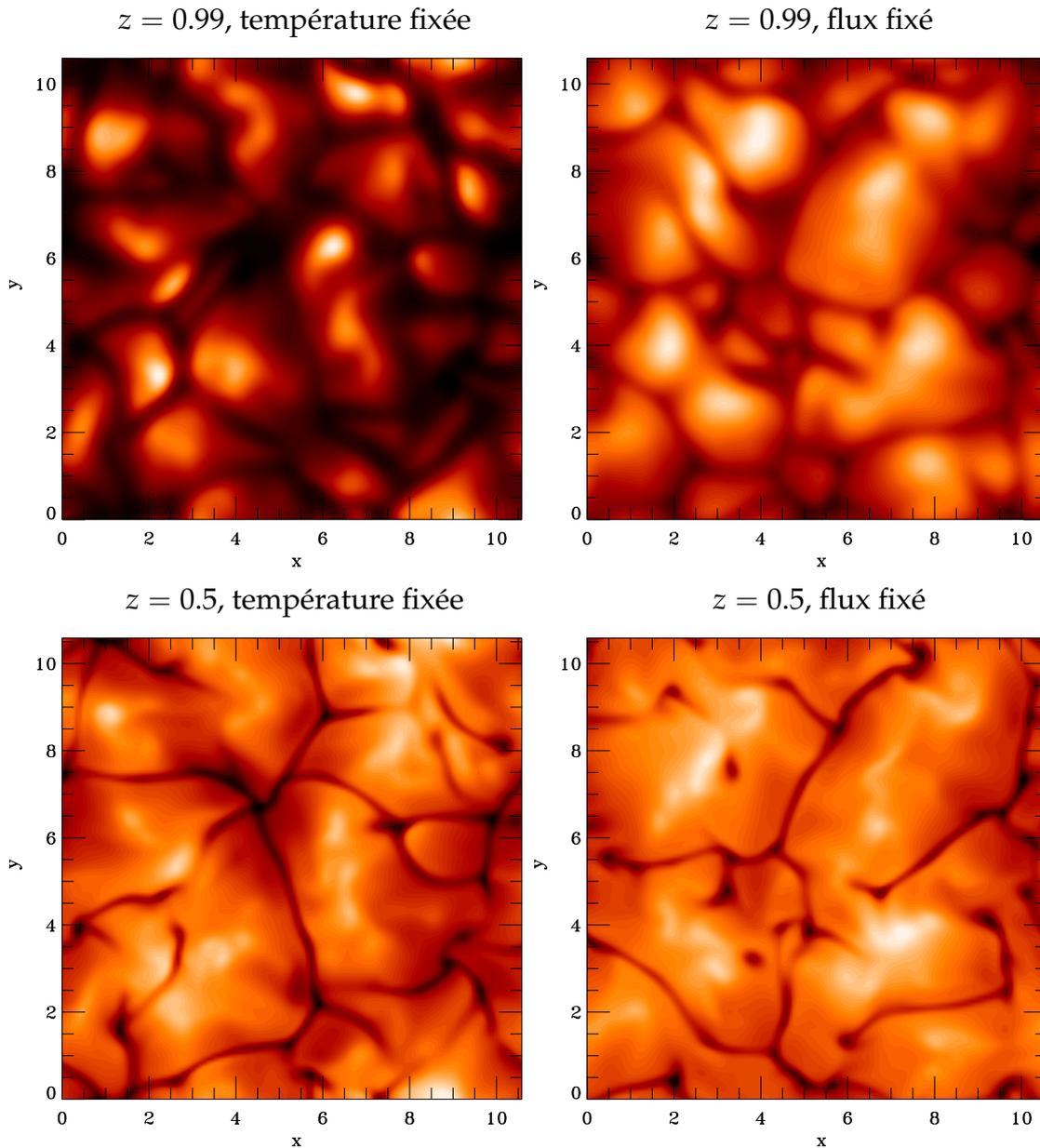


FIG. 4.15 – Comparaison entre des cartes de fluctuations de température proche de la surface ($z = 0.99$, en haut) et au milieu ($z = 0.5$, en bas) pour des simulations à rapport d'aspect 10, dans le cas d'une condition aux limites de type température fixée (à gauche) ou de flux thermique fixé (à droite) au niveau de la plaque supérieure. Dans le premier cas, l'existence de la couche limite donne une apparence visuelle de la surface dominée par les petites échelles, tandis que dans le deuxième cas, la mésoéchelle visible en $z = 0.5$ reste très apparente en surface.

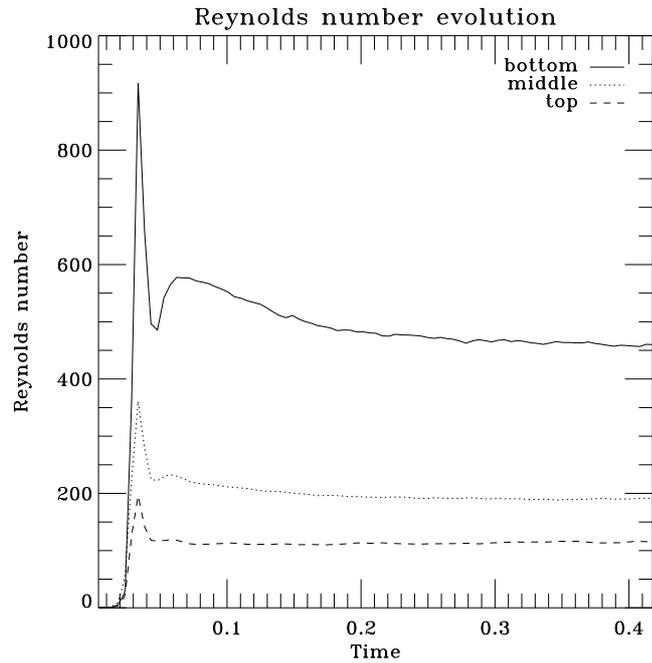


FIG. 4.17 – Évolution temporelle du nombre de Reynolds de l'équation (4.5) à trois altitudes différentes.

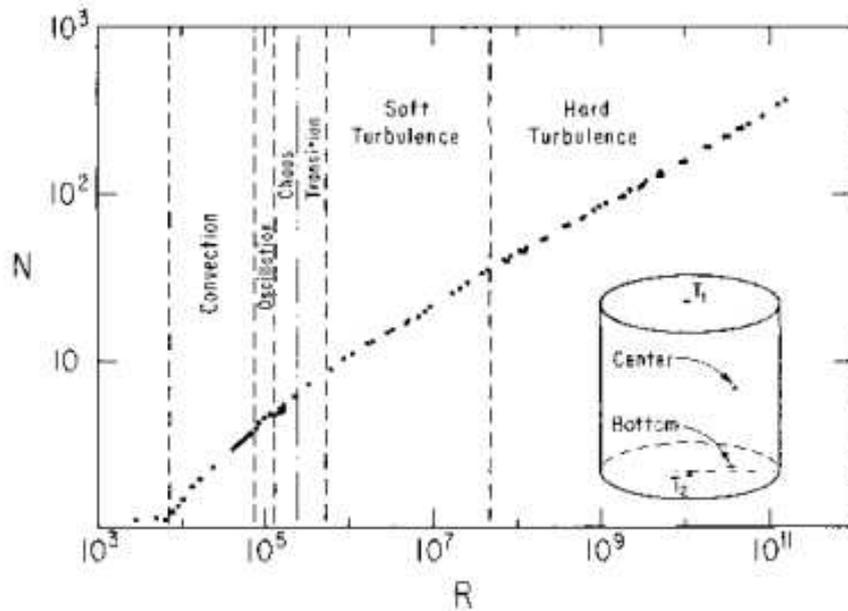


FIG. 4.18 – Transition schématique vers la convection turbulente dans l'hélium pour un rapport d'aspect de l'ordre de 1 (extrait de Heslot et al. (1987)). Selon cette classification, notre simulation se situerait au niveau du régime chaotique.

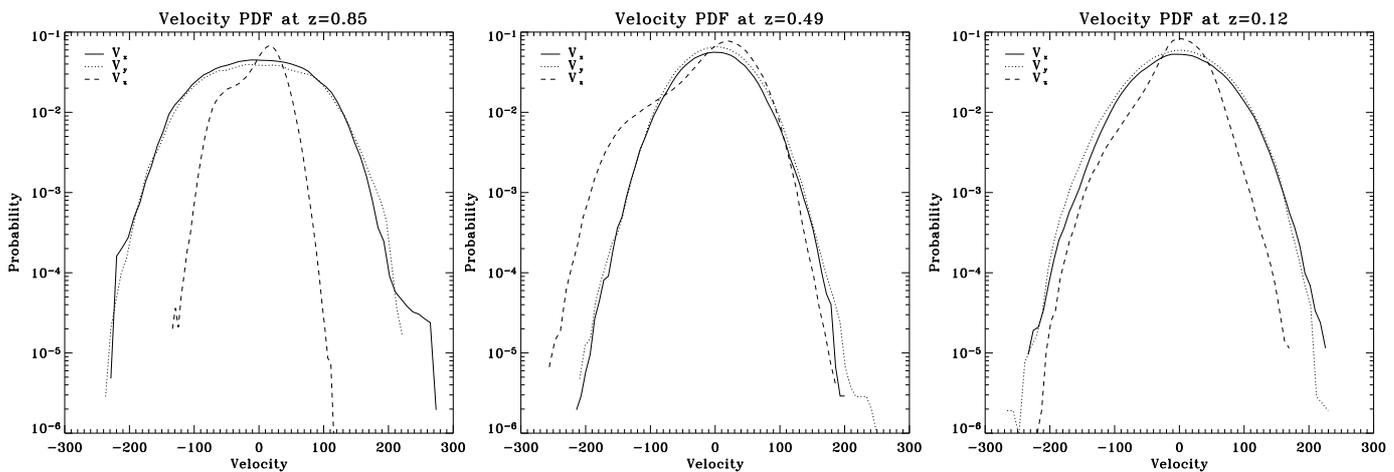


FIG. 4.19 – Fonction de densité de probabilité de la vitesse à trois altitudes différentes. Les traits plein et pointillé correspondent aux deux composantes de la vitesse horizontale et les tirets à la vitesse verticale.

Finalement, le nombre de Mach basé sur la vitesse r.m.s et la vitesse du son à chaque profondeur vaut environ 0.1 dans les zones profondes et atteint au maximum 0.15 en surface, où la vitesse du son est la plus petite. Les effets acoustiques restent donc relativement faibles dans cette simulation.

Statistiques de l'écoulement

Pour terminer cette partie sur l'analyse de l'écoulement dans l'espace réel, regardons les statistiques turbulentes qui permettent de quantifier des phénomènes tels que l'intermittence. La fonction de densité de probabilité de la vitesse verticale (figure 4.19) près de la surface révèle à son tour l'asymétrie entre les parties montantes et descendantes de l'écoulement : la surface couverte par les panaches descendants est plus faible, ce qui explique le pic (c'est d'ailleurs une inflexion) plus faible en vitesse négative qu'en vitesse positive. D'autre part, l'intensité des panaches descendants est plus grande, ce qui se traduit par un pic de vitesses négatives situé à une valeur absolue de vitesse plus élevée que celle du pic du côté positif.

Les p.d.f. sur les dérivées ou les incréments de la vitesse sont plus révélatrices de l'intermittence de l'écoulement. Nous représentons ici les p.d.f. des trois composantes de la vorticité (figure 4.20). Celles-ci s'éloignent sensiblement d'un profil gaussien. Deux points importants sont à signaler. Tout d'abord, la p.d.f. de vorticité verticale est nettement plus semblable à celles de la vorticité horizontale au milieu de la couche que près des parois. Cette ressemblance en profondeur entre les différentes composantes de vorticité, qui était déjà plus ou moins visible sur les mosaïques de la figure 4.10, semble indiquer que l'effet des conditions

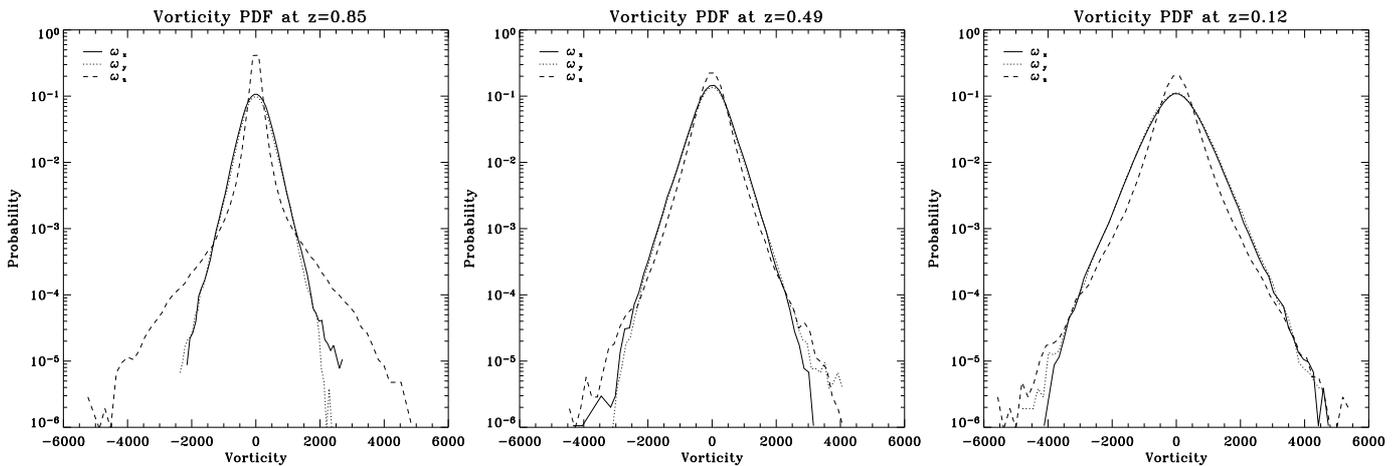


FIG. 4.20 – Fonction de densité de probabilité de la vorticité à trois altitudes différentes. Les traits plein et pointillé correspondent aux deux composantes de la vorticité horizontale et les tirets à la vorticité verticale.

aux limites est plus faible dans cette zone. La deuxième remarque concerne la forme de la p.d.f. de la vorticité verticale près du haut de la couche. Les événements de forte intensité y sont favorisés par rapport au milieu de la couche. Ils correspondent à des dipôles de vorticité intenses situés au niveau des vertex de l'écoulement (figure 4.21). Cet effet d'intensification du moment cinétique vertical dans les panaches descendants étroits avait déjà été observé par Toomre et al. (1990), et pourrait avoir des conséquences sur la structure à très grande échelle de l'écoulement (nous y reviendrons ultérieurement). Notons que cet effet d'amplification de l'intermittence en surface est également observé sur le champ magnétique dans les simulations réalisées par Emonet et Cattaneo (2001) et Cattaneo et al. (2003).

Finalement, la p.d.f. de température (figure 4.22) est assez similaire à celle observée dans des expériences de convection à nombre de Rayleigh assez faible et n'exhibe pas vraiment d'ailes exponentielles, ce qui confirme que le régime de l'écoulement n'est pas complètement turbulent.

4.4 Analyse dans l'espace de Fourier

Jusqu'à présent, nous nous sommes principalement intéressés aux propriétés de la turbulence dans l'espace réel. Celle-ci est caractérisée à la fois par une forte anisotropie et une forte inhomogénéité. Afin de compléter cette description, nous allons maintenant nous concentrer sur une analyse dans l'espace de Fourier et sur la description des spectres de quantité de mouvement et de température définis

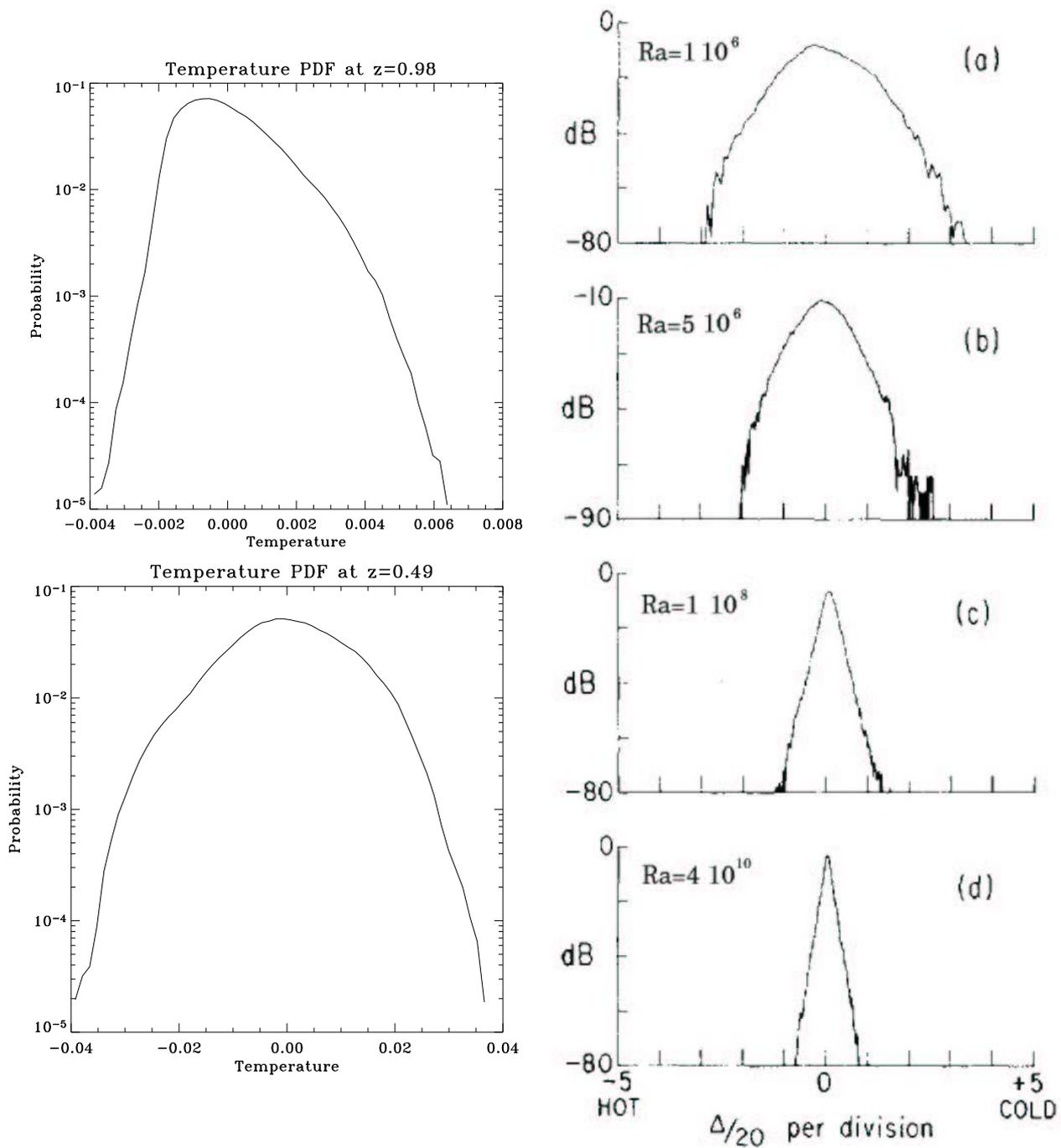


FIG. 4.22 – À gauche : fonction de densité de probabilité de la fluctuation de température près de la surface et au milieu de la couche. À droite : fonctions de densité de probabilité expérimentales pour différents nombres de Rayleigh, obtenues pour de la convection dans l'hélium (Sano et al. 1989).

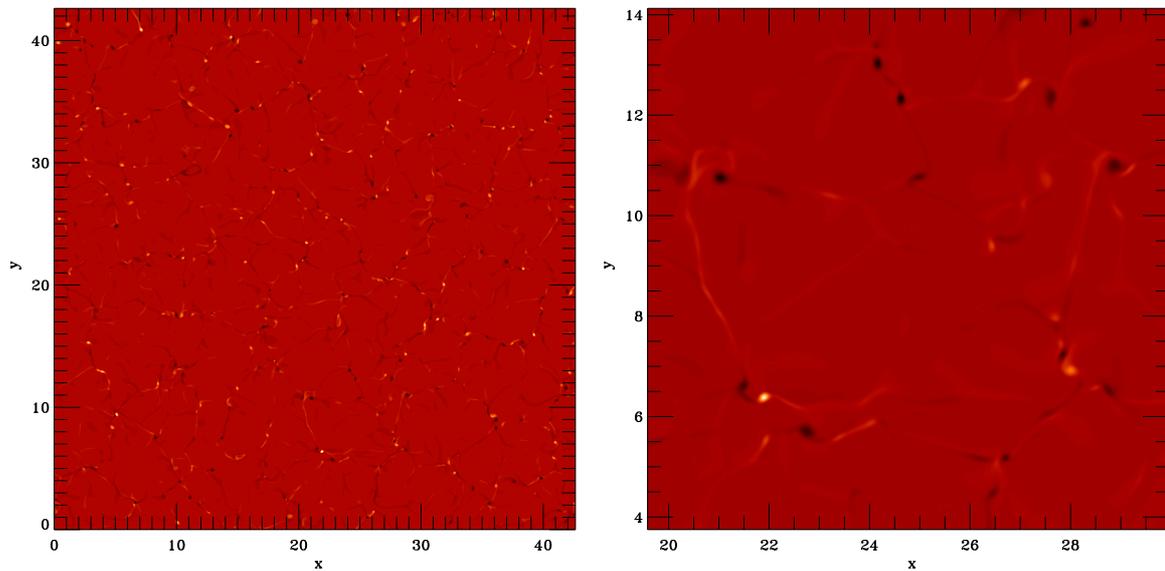


FIG. 4.21 – Cartes de l'intensité de la vorticité verticale près de la surface. À gauche : plan complet à $z = 0.99$. À droite : zoom sur une mésocellule délimitée par plusieurs monopôles et dipôles intenses de vorticité (autour de $x = 25$, $y = 9$).

au paragraphe 4.2.c. Dans le paragraphe qui suit, il sera question uniquement des spectres à une profondeur fixée calculés dans le régime stationnaire. Nous tenterons ensuite d'étudier le bilan d'énergie dans l'espace spectral afin de déterminer l'origine des mésoéchelles de la simulation.

4.4.a Quelle loi de puissance pour les spectres ?

La théorie Bolgiano-Oboukhov (BO59)

Pour commencer, il est légitime de se demander quel type de loi de puissance devrait être observé dans une simulation de convection comme celle-ci. En particulier, une description de type Kolmogorov 41 (K41) est-elle adéquate pour un écoulement aussi anisotrope ? Nous avons déjà évoqué ce point au paragraphe 1.5.c du chapitre 1. La réponse donnée par Nordlund et al. (1997) est négative. Voyons ce qu'il en est exactement ici¹.

Dans la théorie K41, l'hypothèse essentielle pour l'analyse dimensionnelle est que les propriétés de la turbulence ne dépendent que du taux de dissipation (ou

¹Nous raisonnerons uniquement sur des théories pour le fluide incompressible. Passot et Pouquet (1987) ont trouvé pour le fluide compressible des corrections aux exposants de l'ordre de M^2 . Le nombre de Mach dans cette simulation ne dépassant pas 0.15, cette hypothèse simplificatrice ne devrait pas poser de problème particulier ici.

de production) moyen des fluctuations de vitesse, qui vaut

$$\langle \varepsilon \rangle = \Pr \sum_{i,j} \left\langle (\partial_i v_j)^2 \right\rangle \quad (4.6)$$

dans le système d'unités utilisé. La seule possibilité offerte par l'analyse dimensionnelle est que les spectres de vitesse et d'un scalaire passif θ soient de la forme

$$\begin{aligned} E(k) &\sim \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3}, \\ E_\theta(k) &\sim \langle \varepsilon \rangle^{-1/3} \langle N \rangle k^{-5/3}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'analyse pour le scalaire passif est faite par exemple dans le livre de Tennekes et Lumley (1972), voir aussi Warhaft (2000). N a été défini auparavant dans l'équation (4.4).

Il existe une théorie intégrant les effets de la stratification et de l'activité d'un scalaire comme la température. Il s'agit de la théorie de Bolgiano et Oboukhov (Oboukhov 1959, Bolgiano 1962). Lorsque la température est active (dans un milieu stratifié de manière stable ou instable), la grandeur caractéristique du couplage dans l'équation de la quantité de mouvement doit être incorporée dans l'analyse dimensionnelle. Pour la convection dans l'approximation de Boussinesq, par exemple, le coefficient αg intervient. Sinon, on peut prendre le paramètre $G = g/\bar{T}$ où \bar{T} est la moyenne horizontale de la température à la profondeur considérée. On suppose alors que le taux de dissipation moyen des fluctuations thermique $\langle N \rangle$ est constant (par un argument similaire à l'hypothèse de K41) et que $\langle \varepsilon \rangle$ n'intervient plus, ce qui permet d'aboutir aux lois de puissance (dites de Bolgiano-Oboukhov) suivantes :

$$\begin{aligned} E(k) &\sim \langle N \rangle^{2/5} G^{4/5} k^{-11/5}, \\ E_\theta(k) &\sim \langle N \rangle^{4/5} G^{-2/5} k^{-7/5}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dans la théorie telle qu'elle est formulée à l'heure actuelle, il semble impossible d'obtenir un spectre en $k^{-7/5}$ pour la température sans obtenir un spectre en $k^{-11/5}$ pour la vitesse. Remarquons en passant que la théorie reposait initialement sur l'analyse dimensionnelle, mais que des justifications utilisant des arguments de conservation de l'entropie ont été données (Procaccia et Zeitak 1990, L'vov 1991, Yakhot 1992).

Le problème suivant est de déterminer les régions du spectre où des lois de type BO59 ou K41 devraient être observées. Dans la région du spectre de Bolgiano, il doit en principe exister un équilibre dominant entre les termes inertiels et la force d'Archimède. Le recouvrement entre les deux théories K41 et BO59 s'effectue lorsque les forces de viscosité deviennent du même ordre de grandeur que la flottabilité. On écrit alors l'égalité entre les spectres (4.7)-(4.8), ce qui permet d'obtenir l'expression de l'échelle caractéristique de recouvrement (à un facteur de l'ordre de l'unité sans dimension près), qui s'appelle l'échelle de Bolgiano

(Monin et Yaglom 1971, Benzi et al. 1998). Il vient

$$L_B(z) = \frac{\langle \varepsilon \rangle^{5/4}}{\langle N \rangle^{3/4} G^{3/2}}, \quad (4.9)$$

qui peut se mettre sous la forme (Chillá et al. 1993) sans dimension

$$L_B(z) = \frac{\text{Nu}^{1/2}}{(\text{RPr})^{1/4}}. \quad (4.10)$$

Les mouvements à des échelles plus petites que L_B sont en principe décrits par une turbulence de type K41, et ceux à grande échelle par des lois de puissance BO59.

Cette théorie a été vérifiée principalement par des expériences (voir par exemple Chillá et al. (1993)). Une expérience à faible nombre de Prandtl (Cioni et al. 1995) n'a pas permis de mettre en évidence de spectre de Bolgiano, confirmant la dépendance qualitative vis-à-vis de Pr dans l'équation (4.10). Récemment, plusieurs simulations numériques ont mis en évidence des spectres BO59 dans des domaines de rapport d'aspect de l'ordre de 1 (Calzavarini et al. 2002, Verzicco et Camussi 2003). Expérimentalement, la loi en $k^{-7/5}$ pour la température est souvent observée mais la loi en $k^{-11/5}$ pour la vitesse est obtenue plus rarement. Dans le travail de Verzicco et Camussi (2003) (simulation de convection à grand nombre de Rayleigh), un spectre en $k^{-5/3}$ pour la vitesse cohabite avec un spectre en $k^{-7/5}$ pour la température, ce qui bien évidemment pose problème à la théorie.

Le domaine d'application de la théorie BO59 (hypothèses sur les propriétés de l'écoulement, régimes d'observation) reste fort mal compris. Shraiman et Siggia (1990), Siggia (1994), par exemple, ont prétendu qu'il ne s'agissait pas d'une théorie asymptotique à grand nombre de Rayleigh. Il nous semble cependant intéressant de mentionner que les simulations à grand rapport d'aspect sont très intéressantes pour tester cette théorie, compte-tenu du critère d'échelles $r > L_B$ donné ci-dessus.

Application à la simulation A = 42.6

Nous avons calculé l'échelle de Kolmogorov (ou de dissipation) et de Bolgiano à partir des moyennes horizontales \bar{N} et $\bar{\varepsilon}$ (figure 4.24) au lieu des moyennes d'ensemble $\langle N \rangle$ et $\langle \varepsilon \rangle$. Dans le système d'unités choisi, rappelons que l'échelle de Kolmogorov est déterminée par

$$L_D = \left(\frac{\text{Pr}^3}{\bar{\varepsilon}} \right)^{1/4}. \quad (4.11)$$

Les résultats pour la dépendance verticale de L_B et L_D sont représentés sur la figure 4.23. À toutes les profondeurs, l'échelle de Kolmogorov est beaucoup

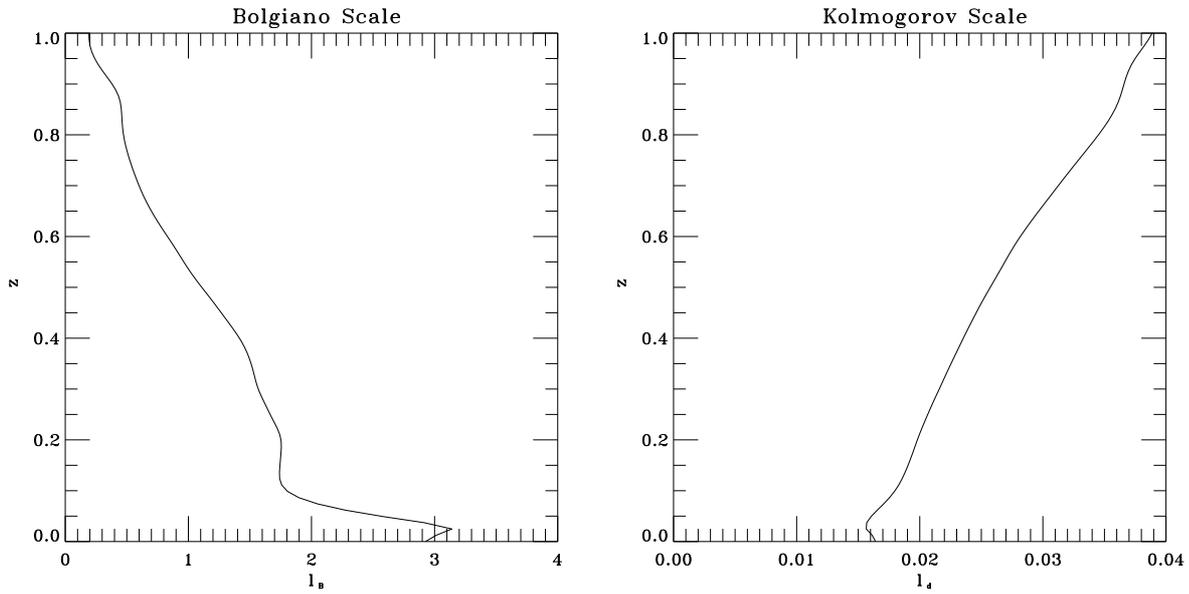


FIG. 4.23 – Échelle de Bolgiano (L_B , à gauche) et de Kolmogorov (L_D , à droite) en fonction de l'altitude, exprimées en unités de hauteur d du domaine de simulation.

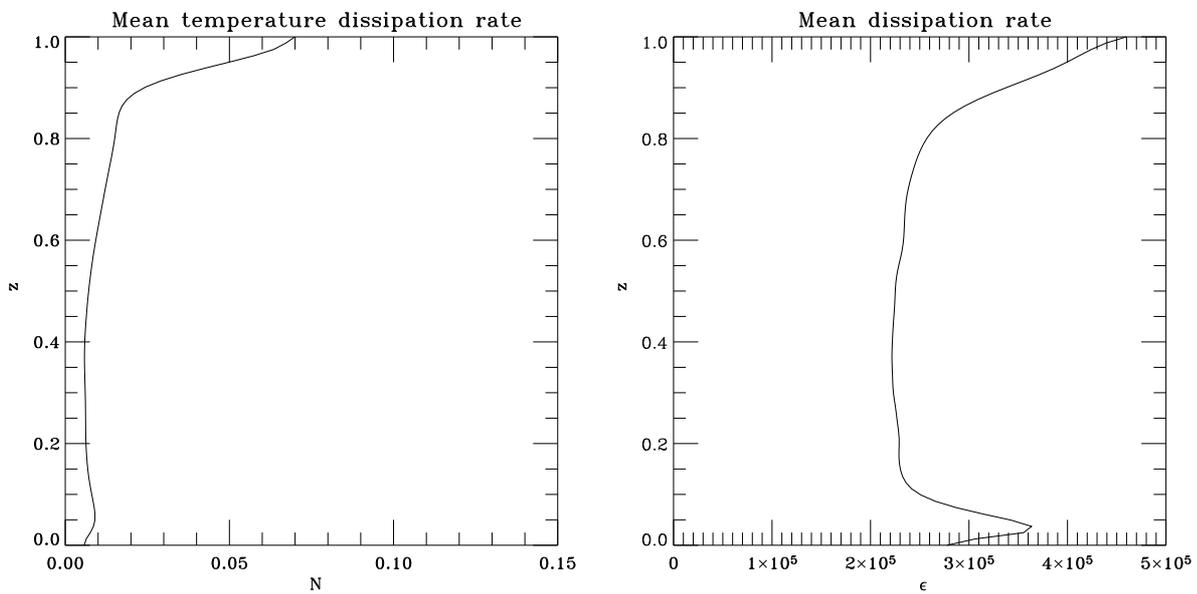


FIG. 4.24 – Taux de dissipation des fluctuations de température \bar{N} (à gauche) et des fluctuations de vitesse $\bar{\epsilon}$ (à droite) pour la simulation de rapport d'aspect $A = 42.6$ en fonction de l'altitude.

plus petite que l'échelle de Bolgiano. Cette dernière est elle-même petite par rapport à la dimension horizontale du domaine de simulation. Il devrait donc en principe être possible d'observer des lois de puissance de type BO59 dans cette simulation. En passant, on peut voir que l'échelle de Kolmogorov calculée ici est bien comparable à l'échelle de maille choisie dans la direction horizontale $\Delta x = 42.6/1024 \simeq 0.04$. Des tests utilisant moins de points et le même régime de paramètres avaient abouti à une instabilité de la simulation.

En pratique, nous avons observé que les spectres ne possédaient pas toujours de loi de puissance nette en dépit de la valeur du nombre de Reynolds et du nombre de modes relativement importants de la simulation (340 compte-tenu de la troncature à $2/3$) et que les pentes observées pouvaient dépendre assez fortement de la profondeur à laquelle le spectre était calculé. La figure 4.25 représente les spectres de quantité de mouvement² et de température pris à trois altitudes différentes et multipliés par $k^{5/3}$ ou $k^{11/5}$ pour la quantité de mouvement et par $k^{5/3}$ ou $k^{7/5}$ pour la température, de telle manière que la loi de puissance se manifeste sous la forme d'un plateau. À proximité de la surface, le spectre de quantité de mouvement se rapproche de $k^{-5/3}$. En revanche il n'y a pas de loi apparente pour le champ de température. L'explication à cela est que la couche limite thermique fait apparaître des petites échelles autour de $k = 40$. Vers le milieu de la couche, en revanche, on observe une remontée du spectre de quantité de mouvement aux échelles $10 < k < 100$. Le spectre de température, pour sa part, est nettement mieux ajusté avec une loi en $k^{-7/5}$ que par une loi en $k^{-5/3}$. Cette tendance reste visible jusqu'au bas de la couche. On retrouve là encore une certaine homogénéité pour les statistiques de la température quand on se dirige vers le bas. En revanche, le spectre de quantité de mouvement évolue vers le bas de la couche et une loi de puissance avec un exposant inférieur à $5/3$ en valeur absolue (k^{-1} ?) est observé dans cette région.

Hormis dans la couche limite supérieure, un spectre en $k^{-7/5}$ pour la température semble donc être réalisé sur une décade, tandis que le spectre de vitesse ne se rapproche en aucun cas de $k^{-11/5}$. Cette situation pourrait être semblable à celle observée par Verzicco et Camussi (2003) ou dans certaines expériences. Des simulations à grand rapport d'aspect 2D en cours de réalisation semblent montrer que pour des régimes légèrement plus turbulents ($R = 3 \cdot 10^6$) avec les mêmes paramètres que dans la grande simulation, on observe toujours un spectre en $k^{-7/5}$ pour la température mais qu'un spectre de quantité de mouvement en k^{-3} , caractéristique de la turbulence 2D, se forme pour la vitesse.

Dans tous les cas, comment un tel spectre de température peut exister sans son cousin en $k^{-11/5}$ pour la quantité de mouvement reste une énigme pour la théorie actuelle, et des investigations plus poussées sont nécessaires. Une analyse basée sur l'*Extended Self Similarity* (ESS, voir Benzi et al. (1993, 1995)) pourrait s'avérer utile pour les simulations. Cette théorie permet en effet de découvrir des comportements autosimilaires dans des régimes peu turbulents lorsque des lois

²Nous n'avons pas observé de variation significative entre les spectres de vitesse et de quantité de mouvement.

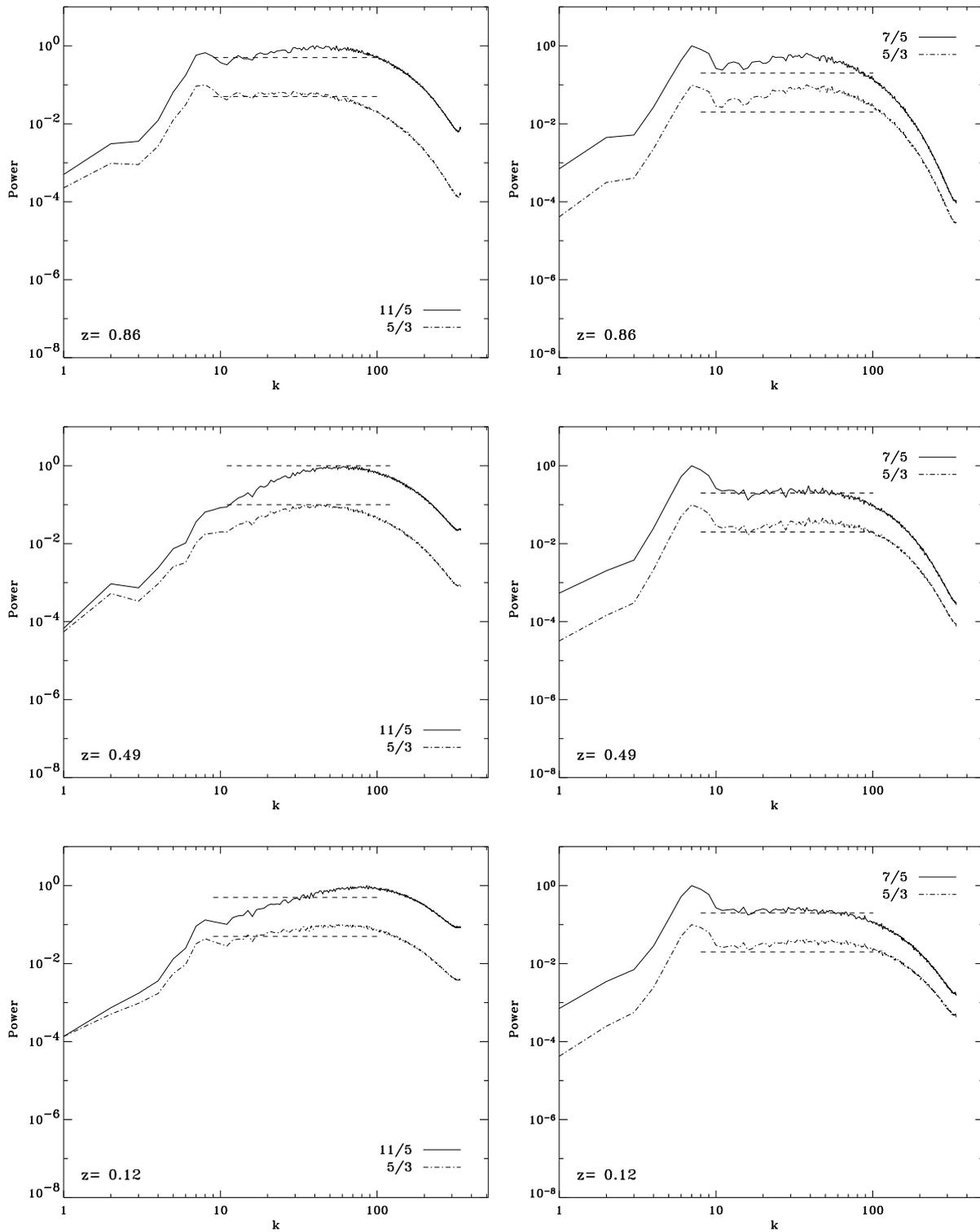


FIG. 4.25 – Spectres pour la quantité de mouvement (à gauche) et pour la température (à droite) compensés par les exposants K41 ou BO59. La profondeur à laquelle chaque spectre a été calculé augmente de haut en bas.

de puissance ne sont pas observées pour les fonctions de structure (ou de manière équivalente pour les spectres), et a déjà permis de trouver des exposants de type Bolgiano pour des expériences de convection (Benzi et al. 1994).

4.4.b Dynamique et transfert non-linéaire dans l'espace spectral

Nous allons à présent revenir sur l'origine des mésoéchelles observées dans la simulation. Le paragraphe 4.3.b a permis de mettre en évidence que ces panaches s'étendaient sur toute la profondeur du domaine, contrairement aux échelles granulaires (voir aussi la figure 4.9). Au chapitre 1, nous avons également décrit les résultats de Cattaneo et al. (2001), qui avaient mis en évidence un phénomène comparable dans des simulations Boussinesq. Ils avaient simplement émis l'hypothèse d'interactions collectives entre petites échelles pour expliquer leur existence. Pour savoir si cette supposition était correcte, nous avons donc essayé d'analyser la dynamique de l'écoulement dans l'espace spectral horizontal et de mesurer les effets des termes de transfert non-linéaire au niveau des grandes échelles.

Nous partons des équations de la quantité de mouvement (équation (2.1) combinée à l'équation (2.2), chapitre 2) dont on prend la transformée de Fourier horizontale, et dont on extrait la composante solénoïdale (qui est largement dominante dans une simulation comme la nôtre où le nombre de Mach reste faible) en appliquant un opérateur de projection. L'équation obtenue est ensuite multipliée par le complexe conjugué de la composante solénoïdale de la quantité de mouvement $(\widehat{\rho v})_k^*$ puis intégrée sur Ω_k et z , ce qui permet d'obtenir l'équation d'évolution pour le spectre unidimensionnel solénoïdal $E^s(k)$:

$$\partial_t E^s(k) = T(k) + F(k) + D_v(k), \quad (4.12)$$

avec

$$T(k) = -2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} (\widehat{\rho v})_k^* \cdot \widehat{\mathcal{P}} \left[\widehat{\nabla \cdot (\rho v v)}_k \right] k \, d\Omega_k \, dz \right\}, \quad (4.13)$$

$$F(k) = -2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} (\widehat{\rho v})_k^* \cdot \widehat{\mathcal{P}} \left[\widehat{\rho}_k \Lambda e_z \right] k \, d\Omega_k \, dz \right\} \quad (4.14)$$

et

$$D_v(k) = 2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} (\widehat{\rho v})_k^* \cdot \widehat{\mathcal{P}} \left[\Pr \widehat{\Delta v}_k + \frac{\Pr}{3} \widehat{\nabla (\nabla \cdot v)}_k \right] k \, d\Omega_k \, dz \right\}. \quad (4.15)$$

Dans les équations précédentes, $\widehat{\mathcal{P}}$ représente l'opérateur de projection

$$\mathcal{P} \equiv \text{Id} - \nabla \Delta^{-1} \nabla. \quad (4.16)$$

agissant sur des fonctions de \mathbf{k} et z , et \Re désigne la partie réelle. $T(k)$ représente le terme de transfert non-linéaire, $F(k)$ est le forçage par la poussée d'Archimède, et

$D_\nu(k)$ caractérise la dissipation de l'énergie cinétique par viscosité. En appliquant une procédure similaire pour l'équation de température, on trouve que

$$\partial_t E_\theta(k) = L(k) + N(k) + D_\kappa(k) + V_\nu(k), \quad (4.17)$$

avec

$$L(k) = -2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} \widehat{T}_k^* \left(\widehat{\partial_{z_k} T} + (\gamma - 1) \overline{T} \widehat{\nabla \cdot \mathbf{v}_k} \right) k \, d\Omega_k \, dz \right\}, \quad (4.18)$$

$$N(k) = -2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} \widehat{T}_k^* \left(\widehat{\mathbf{v} \cdot \nabla T}_k + (\gamma - 1) \overline{T} \widehat{\nabla \cdot \mathbf{v}_k} \right) k \, d\Omega_k \, dz \right\} - L(k), \quad (4.19)$$

$$D_\kappa(k) = 2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} \widehat{T}_k^* \gamma \left(\frac{\Delta T}{\rho} \right)_k k \, d\Omega_k \, dz \right\} \quad (4.20)$$

et

$$V_\nu(k) = 2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} \widehat{T}_k^* (\gamma - 1) C_k^2 \Pr \left(\frac{\nu}{\rho} \right)_k k \, d\Omega_k \, dz \right\}. \quad (4.21)$$

Le terme $L(k)$ dans le membre de droite de l'équation (4.17) est présent dans la théorie linéaire et représente l'advection du profil d'entropie moyen (\overline{T} désigne la moyenne horizontale de la température à chaque profondeur). $N(k)$, qui correspond à l'advection de l'entropie totale moins $L(k)$, est un terme complètement non-linéaire. Finalement, $D_\kappa(k)$ et $V_\nu(k)$ sont respectivement la dissipation thermique et la projection du terme de chauffage visqueux sur la composante k de la température.

Sur la figure 4.26, nous avons représenté ces diverses grandeurs en fonction de k , moyennées sur une période au cours de laquelle on observe que les modes $k < 12$ croissent (se reporter à la figure 4.8 pour $t = 0.13$). Le forçage $F(k)$ est le principal pourvoyeur d'énergie pour ces modes, tandis que le terme de transfert non-linéaire est toujours négatif pour ces mêmes échelles. Dans l'équation de température, c'est également le terme linéaire (lié à la suradiabaticité de l'atmosphère) qui est responsable de l'injection d'énergie aux grandes échelles, tandis que le terme non-linéaire en transfère une partie vers les petites échelles. Les petites échelles se comportent donc avant tout comme des diffuseurs turbulents qui prélèvent de l'énergie aux grandes échelles. Dans les deux équations, le bilan net aboutit à une croissance des modes $k < 12$.

Cette analyse montre par conséquent que l'origine des modes à grande échelle est *convective*. Elle ne provient pas d'un effet de cascade inverse ou d'interactions collectives, comme il aurait été possible d'imaginer en observant la croissance de l'échelle intégrale au cours du temps. Pour simplifier et donner une image physique du phénomène, on peut dire que les petites échelles créent un terme de « diffusion » turbulente (qui n'est pas nécessairement formellement exprimable sous

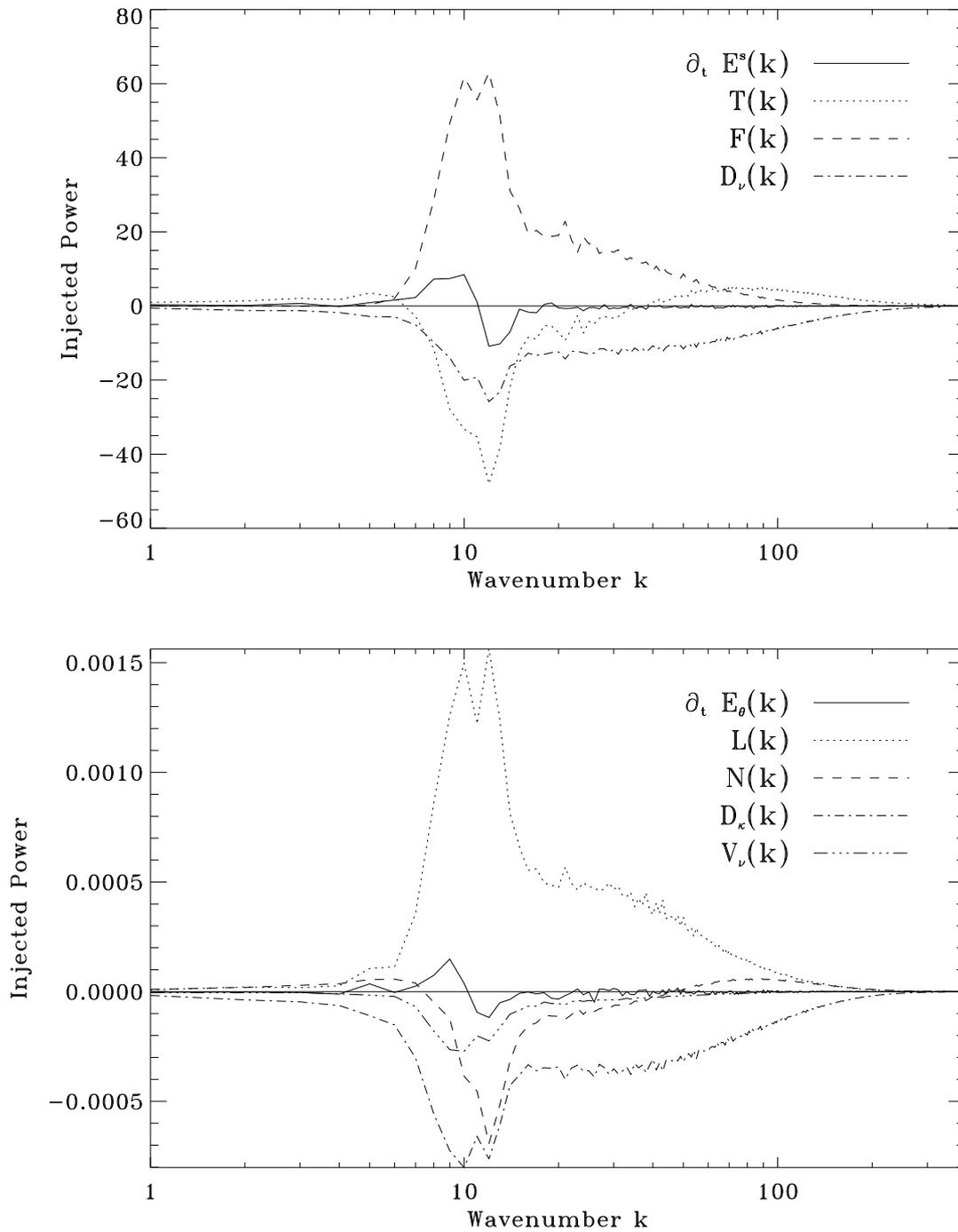


FIG. 4.26 – Représentation des différents termes des équations (4.12)-(4.17), moyennés entre $t = 0.14$ et $t = 0.20$. En haut : équation (4.12). En bas : équation (4.17). La normalisation est faite par rapport aux maxima des spectres. La ligne pleine correspond à l'effet cumulé des termes de droite et représente le taux de croissance effectif Γ_{eff} des modes (figure 4.5) pour la normalisation choisie.

la forme d'un laplacien) qui a pour effet d'abaisser le nombre de Rayleigh effectif et donc le taux de croissance de l'instabilité convective aux grandes échelles.

Deux commentaires supplémentaires peuvent être effectués. Premièrement, nous n'avons pas pour le moment d'explication pour la valeur précise de l'échelle de saturation ($k = 7$) finale. Au vu de l'équilibre entre le forçage et le transfert, il est possible par exemple que celle-ci change si le nombre de Rayleigh (et donc l'intensité de la turbulence à petite échelle) change (voir également la discussion au paragraphe 4.5.c). D'autres paramètres comme la stratification ou le nombre de Prandtl pourraient également avoir une influence sur cette valeur. Une recherche plus détaillée sur ce point et plus généralement sur les relations entre la taille des « granules » et des mésoéchelles reste à faire. Deuxièmement, la figure 4.26 montre que les termes de dissipation restent relativement importants à toutes les échelles et que l'équilibre entre les différents termes dans l'équation de la quantité de mouvement pour des modes autour de $k = 40$ (viscosité en équilibre avec forçage) n'est pas vraiment celui attendu dans le cadre du modèle de Bolgiano. En revanche, l'équilibre entre forçage et diffusion à ces échelles dans l'équation de température semble plus conforme à ce modèle. Cette différence de comportement entre la quantité de mouvement et la température pourrait constituer une piste pour l'interprétation des résultats obtenus sur les spectres. Bon nombre de points restent cependant pour le moins obscurs à ce sujet actuellement.

4.5 Les simulations et la photosphère solaire

Au terme de cette analyse, nous devons nous demander comment utiliser les résultats des simulations pour le problème des grandes échelles de la convection solaire. Rappelons qu'il ne peut s'agir que d'une extrapolation des résultats obtenus dans des régimes d'écoulement « peu » turbulents à des écoulements possédant des nombre de Reynolds de l'ordre de 10^{10} . Les arguments qui suivent devront donc toujours être entendus en gardant cette limite à l'esprit. Afin de créer un lien avec la surface de la photosphère où la radiation joue un rôle fondamental, il est intéressant de comparer pour commencer les résultats obtenus par l'intermédiaire de simulations de polytrophe et ceux obtenus par l'intermédiaire de simulations de convection radiative.

4.5.a Comparaison avec des simulations de convection radiative

Nous avons utilisé les résultats de simulations réalisées par Rieutord et al. (2002). Ces simulations de type LES prennent notamment en compte des profils d'opacité et du transfert radiatif dans l'approximation grise, utilisent des conditions de type frontière ouverte au bas de la couche et un rapport de densité de 100 entre le bas et le haut, pour un rapport d'aspect $A = 10$ ($30 \text{ Mm} \times 30 \text{ Mm} \times 3 \text{ Mm}$, pour une résolution de $315 \times 315 \times 82$). Si le réalisme physique de cette simulation

semble plus important, la dynamique turbulente de la simulation du polytrophe est certainement plus robuste (DNS où le nombre de Reynolds est contrôlé).

La comparaison est effectuée sur la figure 4.27. Plusieurs points importants peuvent être commentés. Tout d'abord, les deux simulations montrent que l'échelle de surface se différencie assez fortement des échelles visibles en profondeur. Des mésoéchelles apparaissent dans les deux simulations. Cependant, dans la simulation avec radiation, l'échelle caractéristique augmente visuellement avec la profondeur tandis que celle-ci reste fixe pour le polytrophe. Cet effet est probablement relié à deux facteurs :

- la stratification en densité dans la simulation polytropicque est moins importante que dans la simulation avec radiation (rapport 3 contre rapport 100) ;
- la condition de paroi ouverte est moins restrictive pour la dynamique que la condition stress-free de la simulation polytropicque.

Un autre point intéressant est qu'on observe dans les deux simulations une modulation de température aux mésoéchelles au niveau de la couche de surface. Dans la simulation avec radiation, il est possible de calculer la surface $\tau = 1$ qui correspond à ce que nous voyons réellement. En revanche, cette représentation est impossible pour la simulation polytropicque. Pour les simulations avec transfert, on peut voir figure 4.28 que la carte d'intensité ne fait pas apparaître de mésoéchelle, contrairement à la carte de température. Ceci est lié au fait que la surface $\tau = 1$ ne correspond pas à une profondeur constante et qu'il existe une modulation des fluctuations de température aux mésoéchelles. Cela confirme les résultats du paragraphe 4.3.b qui montraient que la physique de la couche limite de surface était très importante et qu'elle pouvait masquer complètement la dynamique plus profonde. En réalité, il semble donc que l'expérience idéalisée du polytrophe permette de capturer la physique des zones profondes mais pas celle des zones de surface de manière quantitative. Par exemple, l'existence d'un maximum important aux mésoéchelles à la surface dans le spectre de température des simulations polytropicques constitue certainement un artefact de ce modèle.

Finalement, remarquons en passant que les deux simulations font apparaître des motifs granulaires de taille similaire sur la représentation. Compte-tenu du rapport d'aspect des deux simulations, il semble donc qu'il existe un facteur d'échelle d'environ 4 entre les résultats obtenus dans chacun des cas.

4.5.b Interprétation des résultats dans le cadre photosphérique

L'analyse de l'influence des conditions aux limites thermiques et la comparaison avec les simulations de convection radiative nous ont montré que la physique de la surface jouait un rôle prépondérant dans l'apparence visuelle des solutions et que le défaut de réalisme observé avec le modèle polytropicque au niveau du motif de la granulation était en grande partie lié à ce phénomène. En revanche, sous la surface où l'approximation de diffusion n'a pas de raison d'être invalidée,

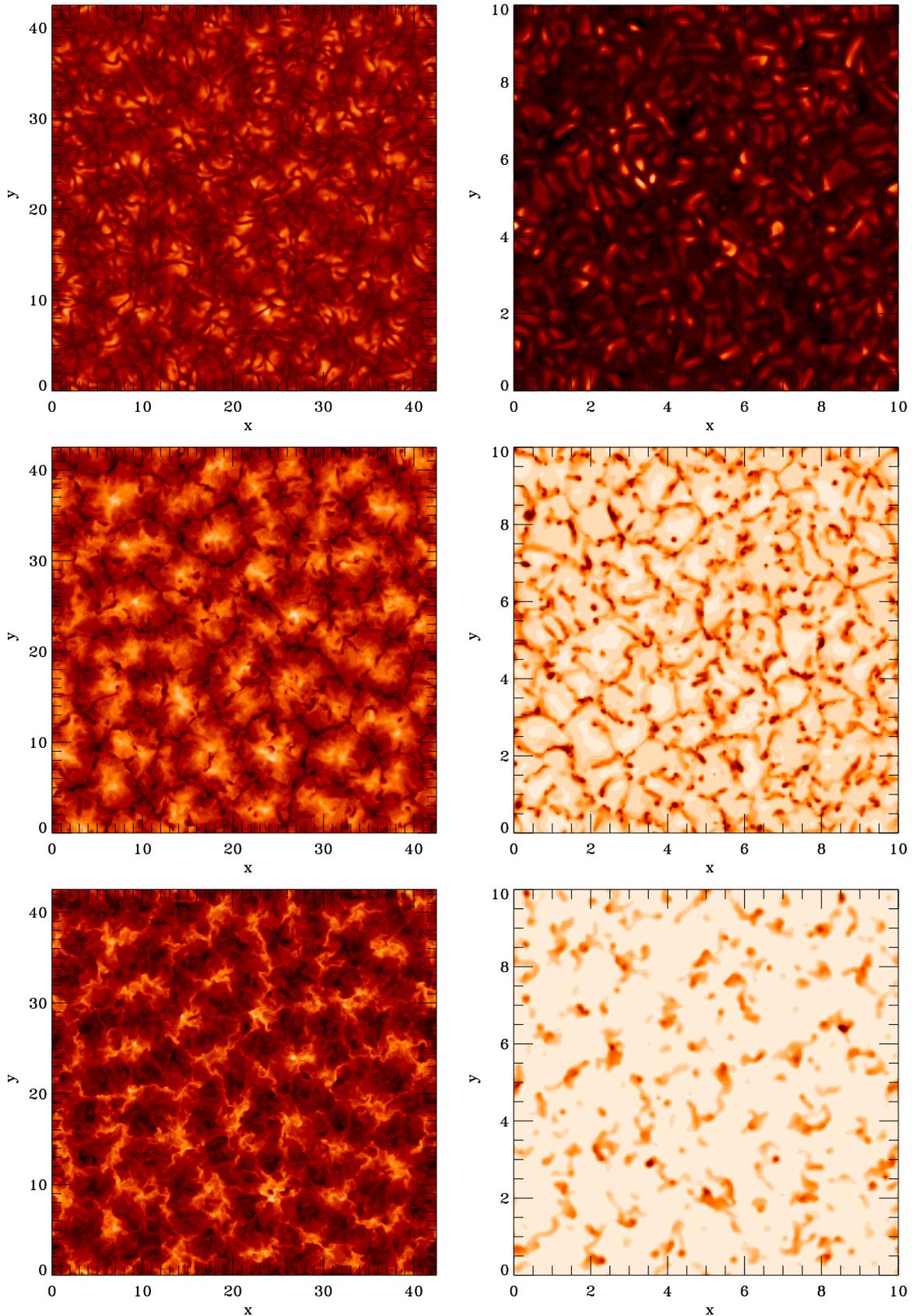


FIG. 4.27 – Comparaison entre trois coupes de température pour la simulation de polytrophe (partie gauche) et une simulation de convection radiative (Rieutord et al. 2002) avec rapport d'aspect 10 (partie droite). Images du haut : $z = 0.99$ et à l'altitude moyenne correspondant à une opacité $\tau = 1$. Images du milieu : milieu de la couche. Images du bas : bas de la couche.

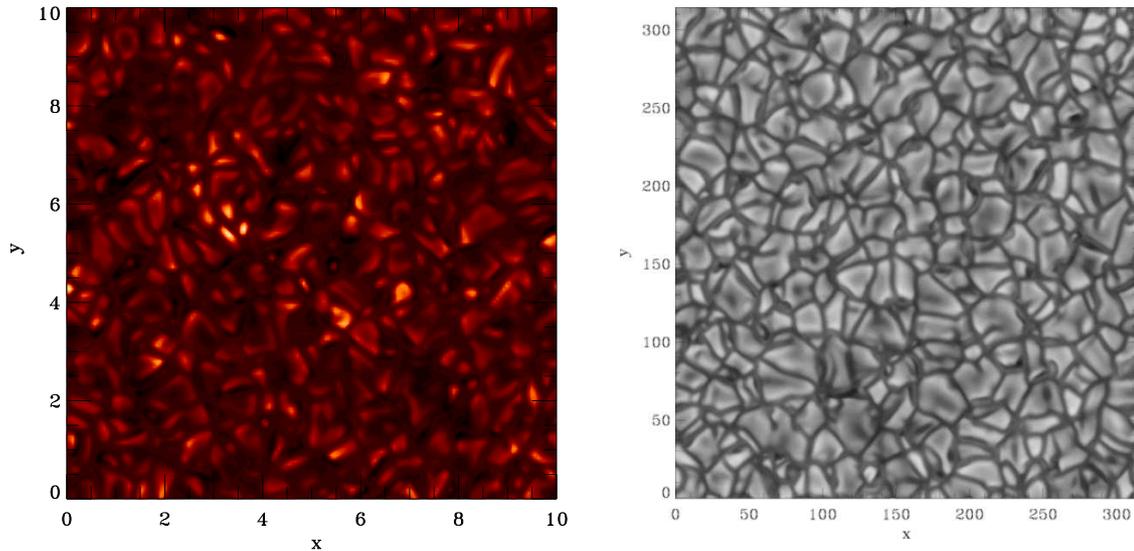


FIG. 4.28 – Comparaison entre la carte des perturbations de température (à gauche) et de l'intensité radiative (à droite) au niveau de la surface $\tau = 1$ pour les simulations de Rieutord et al. (2002). Le système d'unités est différent sur les deux figures mais la même zone est représentée.

on peut légitimement supposer que les simulations de polytropes donneront des résultats « plus proches de la réalité ».

En dépit des possibles différences de régime d'écoulement, on peut malgré tout observer que les simulations que nous avons présentées offrent une image assez voisine de celle de la convection photosphérique. Plusieurs éléments observationnels semblent étayer les conclusions sur l'existence d'une mésoéchelle en profondeur. Il y a pour commencer l'ensemble des résultats vélocimétriques présentés au chapitre 1, qui, comme nous l'avons vu, semblent s'accorder aujourd'hui sur l'existence d'une composante mésogranulaire distincte de la granulation. Viennent ensuite les mesures récentes de champs magnétiques intraréseau (figure 4.29), qui montrent une structuration mésoéchelle du champ semblable aux simulations Boussinesq à grand rapport d'aspect de Emonet et Cattaneo (2001). Il existe également une observable photométrique faible liée à la mésogranulation, qui est l'existence de granules brillants avec une durée de vie de l'ordre de celle de la mésogranulation, autour desquels la granulation semble s'organiser. Ces granules brillants ont été étudiés par Oda (1984). La figure 4.30 reproduit un dessin de cet article ainsi qu'une carte d'intensité moyennée sur une heure, faisant ressortir ces structures. Les deux champs ont une taille similaire. Cette phénoménologie de la structuration autour de points brillants est également observée dans les simulations, qui montrent une organisation des échelles de la couche limite thermique (à courte durée de vie) autour des panaches montants associés à la mésoéchelle, de durée de vie nettement plus élevée.

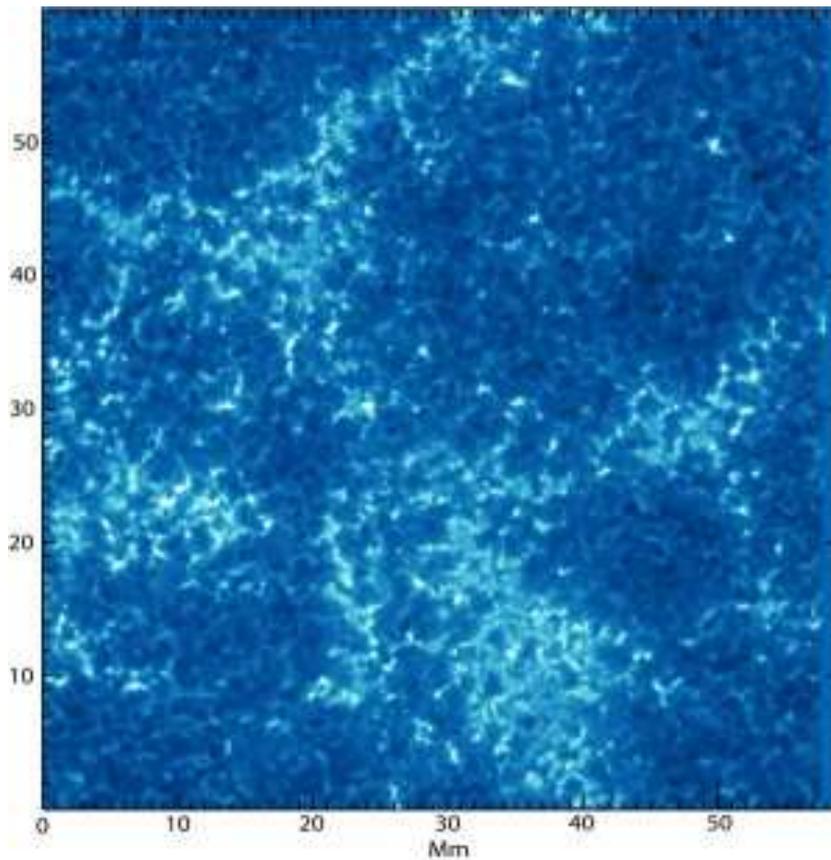


FIG. 4.29 – Carte des champs magnétiques intra-réseau obtenue dans une raie du calcium. On observe le réseau chromosphérique mais aussi une structuration du champ à des échelles plus petites, de l'ordre de 5 000 km (Berger et al. 2004).

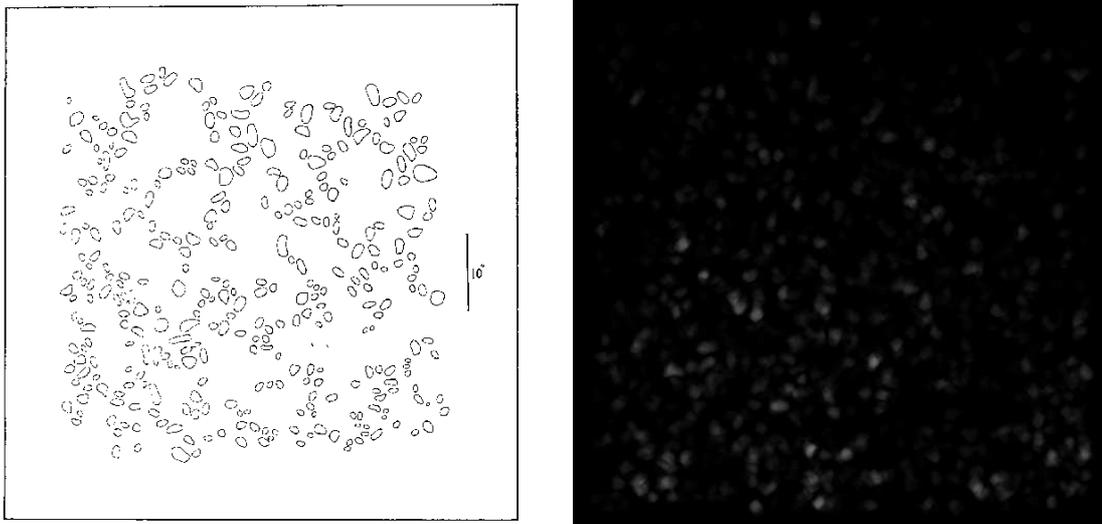


FIG. 4.30 – À gauche : Dessin tiré de Oda (1984) et illustrant la distribution mésoéchelle de granules brillants ($10'' \simeq 7\,300$ km). À droite : un champ (de taille comparable) d'intensité moyenné sur une heure, obtenu par Thierry Roudier à partir d'observations de La Palma.

Au total, nous avons donc à notre disposition plusieurs indications qui semblent montrer qu'une dynamique convective vigoureuse sous la surface photosphérique pourrait être présente à des échelles mésogranulaires. Dans ce modèle, la granulation se présente donc comme une couverture masquant en grande partie la dynamique sous-jacente dont la manifestation principale serait l'advection du motif de la granulation. Notons qu'il n'a pas été nécessaire de recourir à l'ionisation de l'hélium pour faire apparaître deux échelles distinctes dans le modèle.

On peut pour finir évaluer les tailles caractéristiques des structures obtenues dans la simulation. Si on suppose que la granulation a une extension verticale de l'ordre de 150 km dans la réalité (l'échelle de hauteur de densité dans la photosphère) et qu'on la compare à l'épaisseur de nos granules (environ 20 % de l'épaisseur de la boîte de simulation), on aboutit à des granules de dimension horizontale 1 000 km et à des méso-cellules de l'ordre de 5 000 km. L'extension horizontale du domaine de la simulation serait quant à elle d'environ 35 000 km.

4.5.c Et la supergranulation ?

Avant de refermer ce chapitre, nous allons consacrer un paragraphe aux plus grandes échelles de la simulation. Un des objectifs de notre projet initial était en effet d'étudier des mécanismes possible de structuration de l'écoulement à des échelles « supergranulaires » dans l'hypothèse où elles seraient essentiellement liées à des mécanismes de surface.

Nous n'avons pas pu mettre en évidence de structure comparable à la super-

granulation. L'allure à grande échelle des spectres de la figure 4.25 ne fait apparaître aucun pic secondaire comparable à celui de la figure 1.5 du chapitre 1, bien que, d'après l'estimation de la taille du domaine réalisée auparavant, le domaine de calcul utilisé puisse en théorie contenir une structure de type supergranule. Les simulations avec radiation de Rieutord et al. (2002) étaient parvenues à un résultat identique.

Nous avons cependant pu observer l'existence de faibles structures à grande échelle principalement *non convectives*. Pour s'en rendre compte, on peut regarder le spectre de la quantité de mouvement verticale et horizontale de manière séparée (figure 4.31). Le champ de vitesse vertical, qui est normalement responsable du transport convectif, est clairement très faible aux grandes échelles comparativement au champ de vitesse horizontal. La figure 4.26 montre pour sa part que l'origine de l'énergie cinétique aux grandes échelles est en fait le terme d'interaction non-linéaire, qui est faiblement positif pour $k < 7$. Le champ de vitesse en surface filtré sur ces modes est représenté figure 4.32. La composante de type « supergranulaire », qui correspond principalement à une divergence horizontale non nulle, a été séparée de la composante vorticale par une décomposition de Helmholtz sur les directions spectrales horizontales. Dans la simulation, les deux composantes contiennent à peu près autant d'énergie l'une que l'autre. Il semble donc qu'il existe une possibilité pour faire passer de l'énergie des petites vers les grandes échelles dans ce système. Les interactions entre les structures vorticales à mésoéchelle, mises en évidence au paragraphe 4.3.b, comme par exemple leur déformation par l'écoulement horizontal (mécanisme de *vortex stretching*), pourraient en partie être responsable de ce transfert. Il serait cependant prématuré d'en tirer des conclusions pour l'origine d'une échelle comme la supergranulation.

Plusieurs pistes de recherche peuvent être proposées pour élaborer des simulations capables de produire de la supergranulation. Bien sûr, la première consiste à augmenter encore le rapport d'aspect afin d'autoriser des échelles toujours plus grandes. La deuxième serait d'augmenter le rapport de densité entre le haut et le bas de la couche, ou de passer à des conditions de type frontière ouverte au bas de la couche. Cependant nous avons vu que les simulations de Rieutord et al. (2002), avec un contraste de 100 en densité et ce type de conditions aux limites, ne permettaient pas non plus de faire apparaître la supergranulation.

Une autre raison pourrait être que la simulation n'a pas été poursuivie assez longtemps pour pouvoir observer le développement de très grandes échelles. En effet, s'il existait une instabilité à grande échelle de l'écoulement, celle-ci se développerait sur un temps de l'ordre du temps de relaxation thermique basé sur la taille horizontale du domaine (voir le chapitre 5). C'est une possibilité que nous ne pouvons pas exclure. Notons que dans la situation correspondant à la photosphère, les temps caractéristiques de la diffusion horizontale et de la supergranulation semblent difficiles à accorder : si on se base sur une estimation utilisant la diffusivité thermique et la taille de la supergranulation, on trouve que le temps de relaxation L_{sg}^2/κ est d'environ 50 jours et est donc très supérieur à la durée de

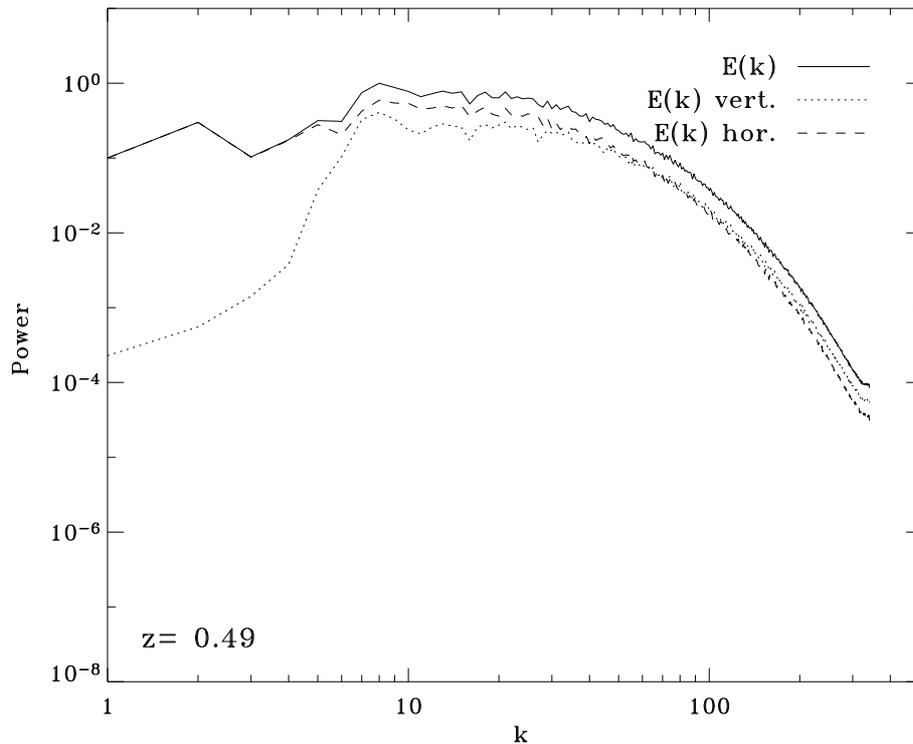


FIG. 4.31 – Spectres de la quantité de mouvement verticale et horizontale au milieu de la couche de convection, dans le régime stationnaire.

vie des supergranules.

Une possibilité extrêmement alléchante est l'inclusion du champ magnétique. Il ne s'agit pas uniquement ici de la traditionnelle remarque : « avec du champ magnétique, les résultats vont changer ». La corrélation entre le réseau chromosphérique et la supergranulation est en effet très importante, et il est possible que l'équipartition entre énergie magnétique et cinétique soit atteinte à l'échelle des supergranules (Clark et Johnson 1967). Pour un champ de 100 G au niveau des points brillants du réseau, une densité de surface de $10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$ et la vitesse de 350 m s^{-1} pour l'écoulement supergranulaire, on obtient en effet ce résultat d'équipartition. La supergranulation pourrait donc émerger de cette saturation (cela requiert toutefois un mécanisme extérieur capable de créer du champ de vitesse à grande échelle). Nous préparons des simulations avec le rapport d'aspect nécessaire pour tester cette hypothèse. Enfin, il est possible que d'autres ingrédients physiques comme l'ionisation ou la rotation puissent avoir une importance non négligeable dans le processus de formation des supergranules.

Il est finalement possible que la supergranulation ne puisse pas du tout apparaître dans les régimes de turbulence que nous sommes actuellement capables de simuler. Seuls des modèles de sous-maille performants pourraient alors nous permettre de sortir de cette ornière. Une question importante, liée à la précédente remarque, se pose : les structures cohérentes que nous avons décrites précédem-

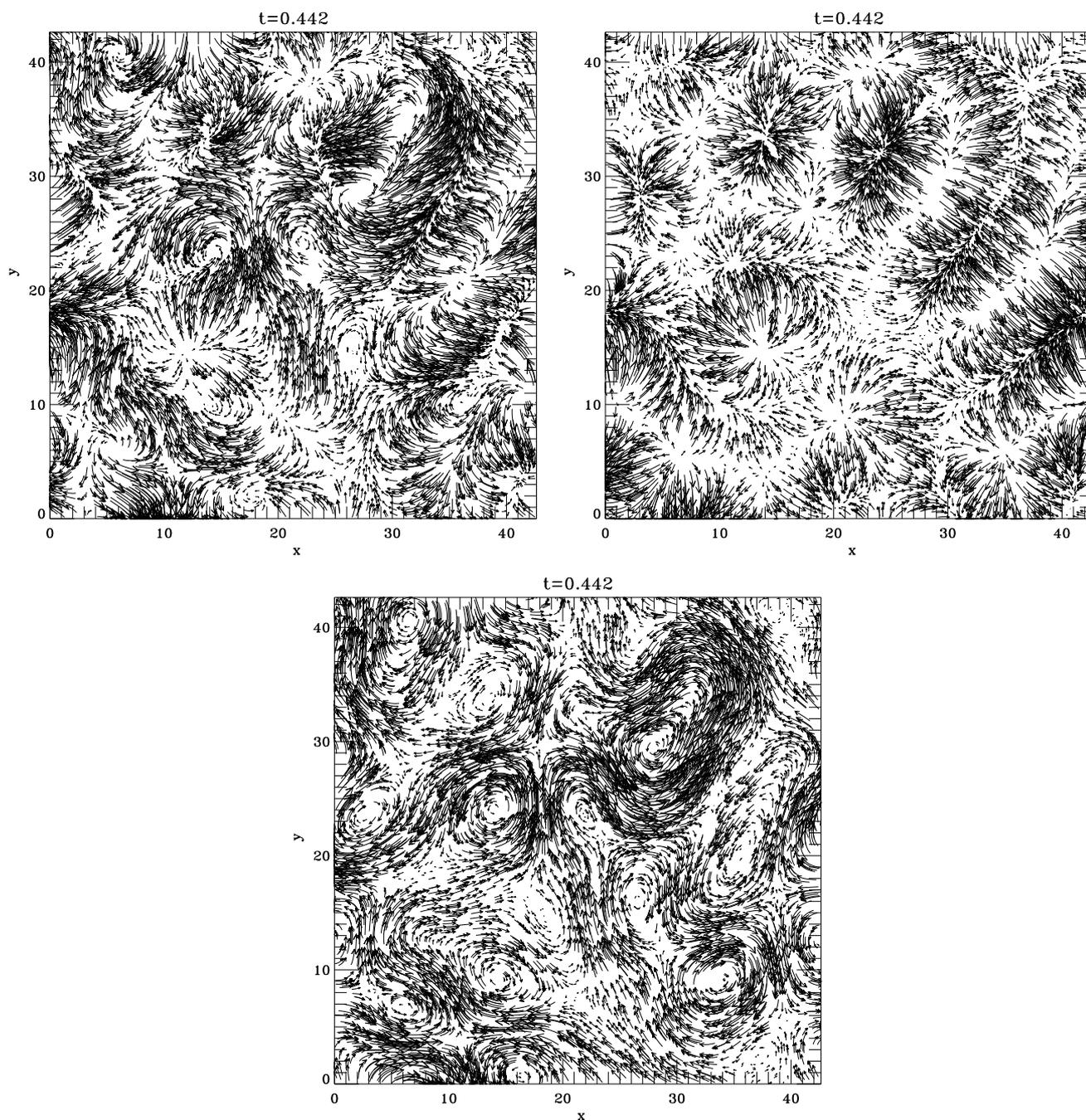


FIG. 4.32 – Représentations du champ de vitesse horizontale à la surface, filtré sur les modes $k < 7$. En haut à gauche : champ de vitesse total. En haut à droite : composante à divergence horizontale non nulle. En bas : composante tourbillonnaire.

ment ont été qualifiées de « mésoéchelles » parce que leur taille était comprise entre celle de la granulation et celle du domaine de simulation. Néanmoins, il semble que le transfert non-linéaire joue un rôle très important dans leur stabilisation en équilibrant le forçage convectif. Comment évoluerait leur taille pour des nombres de Rayleigh plus grands ? Le forçage (le degré d'instabilité) et le transfert seraient tous deux plus importants, et la valeur de l'échelle de saturation finale pourrait être différente. Est-il possible qu'elle atteigne l'échelle de la supergranulation si le nombre de Rayleigh est de 10^{20} ? Pour poser la question différemment, les mésoéchelles observées dans notre expérience ne seraient-elles pas plutôt les « superéchelles » de cette simulation ? La structuration des champs magnétiques aux mésoéchelles observée par Emonet et Cattaneo (2001) pourrait alors être identifiée non plus avec les champs intra-réseau mais avec le réseau magnétique lui-même. Bien qu'il semble difficile d'atteindre numériquement des régimes de nombres de Rayleigh très importants, une étude du comportement de l'échelle intégrale en fonction de ce paramètre devra être menée pour tenter d'observer une tendance d'évolution.

4.6 Récapitulatif des résultats

Pour conclure ce long chapitre, un résumé des résultats obtenus dans nos simulations et de leurs implications pour les problèmes de la mésogranulation et de la supergranulation ne sera pas superflu :

- les simulations de polytrophe à grand rapport d'aspect font apparaître deux échelles distinctes : la première, « la granulation », correspond à une couche limite thermique et ne pénètre pas à des profondeurs supérieures à 20 % de l'épaisseur de la couche. La seconde est une mésoéchelle de taille caractéristique quatre à cinq fois plus importante que l'échelle granulaire, pour les paramètres utilisés dans la simulation ;
- l'écoulement mésoéchelle constitue l'échelle privilégiée du transport d'énergie *par convection*, ce qui infirme les hypothèses avancées par Cattaneo et al. (2001). Sa taille caractéristique est nettement distincte de la taille du domaine de simulation, ce qui signifie que son origine est très probablement physique. Pour autant, nous ne comprenons pas à l'heure actuelle le mécanisme de saturation de cette échelle à la valeur particulière obtenue dans le régime quasi-stationnaire ;
- les comparaisons avec les simulations avec radiation montrent que le défaut de réalisme (trop de grandes échelles) observé à la surface de l'atmosphère polytropique n'est pas nécessairement un problème essentiel pour l'interprétation des résultats ;

- il existe des ressemblances entre la structure de la convection polytropicque à grande échelle et celle de la convection photosphérique, en particulier l'existence de structures stables à durée de vie longue, aux mésoéchelles, que la granulation pourrait masquer en grande partie. Les simulations montrent également qu'il est possible d'obtenir deux échelles distinctes dans la convection sans avoir recours à différents degrés d'ionisation. Mais une question demeure : les mésoéchelles obtenues sont-elles les analogues de la mésogranulation ou de la supergranulation solaire pour cette simulation ?
- Les mouvements à très grande échelle dans la simulation ne peuvent pas être assimilés à des « supergranules » mais il existe un moyen de fournir de l'énergie aux très grandes échelles par l'intermédiaire d'interactions non-linéaires. La génération du champ magnétique aux petites échelles puis son advection pourrait être un élément fondamental dans la structuration de la supergranulation, à l'échelle de laquelle l'équipartition entre énergie cinétique et magnétique semble réalisée.
- nos résultats montrent que les écoulements de convection obtenus dans les simulations réalisées dans les années 1990 avec des rapports d'aspect inférieurs à 10 et des paramètres similaires aux nôtres étaient contraints par les dimensions horizontales du domaine de simulation ;
- l'utilisation de simulations à grand rapport d'aspect offre un champ d'investigation intéressant pour la théorie spectrale de Bolgiano et Oboukhov. Une étude plus approfondie reste à effectuer ;

Le développement de la partie compressible du code présenté en annexe A et la réalisation de ces simulations numériques ont constitué le cœur ce travail de thèse. Les résultats que nous avons obtenus ne sont pas encore complètement finalisés, mais les conclusions auxquelles nous avons abouti montrent que cet outil offre des perspectives très encourageantes, tant que ses limitations sont bien comprises et contrôlées lors de l'analyse.



Mesoscale flows in large aspect ratio simulations of turbulent compressible convection

F. Rincon, F. Lignières, and M. Rieutord

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes, UMR CNRS 5572, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue É. Belin, 31400 Toulouse, France

Received December 17, 2004/ Accepted

Abstract. We present the results of a very large aspect ratio ($A = 42.6$) numerical simulation of fully compressible turbulent convection in a polytropic atmosphere, and focus on the properties of large-scale flows. Mesoscale patterns dominate the turbulent energy spectrum. We show that these structures, which had already been observed in Boussinesq simulations by Cattaneo et al. (2001), have a genuine convective origin and do not result directly from collective interactions of the smaller scales of the flow, even though their growth is strongly affected by nonlinear transfers. If this result is relevant to the solar photosphere, it suggests that the dominant convective mode below the Sun's surface may be at mesoscales.

Key words. Sun: granulation – Convection – Turbulence

1. Introduction

The origin of solar photospheric flows on horizontal scales larger than granulation ($\ell \sim 1\,000$ km) has been a puzzling problem for more than forty years, when supergranulation ($\ell \sim 30\,000$ km) was discovered by Hart (1954) and later on confirmed by Simon & Leighton (1964). Even though recent breakthroughs in the field of supergranulation imaging have been made thanks to the emergence of local helioseismology techniques (Duvall & Gizon 2000) and the results of the MDI instrument (Hathaway et al. 2000), its origin is still unclear. The existence of an intermediate scale, mesogranulation ($\ell \sim 8\,000$ km), is also a matter of debate (Hathaway et al. 2000; Shine et al. 2000; Rieutord et al. 2000; Lawrence et al. 2001).

Meso and supergranulation have long been believed to be due to Helium deep recombinations driving cell-like convection. This view now appears to be out of date (Rast 2003). Several numerical experiments of convection (Cattaneo et al. 1991; Stein & Nordlund 2000) at moderate aspect ratio (A is the ratio of the box width to its depth) have shown a tendency of long-lived large-scale flows to form in depth. Using large aspect ratio ($A = 20$) simulations of Boussinesq convection, Cattaneo et al. (2001) have suggested that mesogranulation may result from nonlinear interactions of granules (see also Rast 2003). A large scale instability (Gama et al. 1994) of granules has also been proposed by Rieutord et al. (2000) to explain supergranulation. Local numerical simulations at $A = 10$ (Rieutord et al. 2002) did not confirm it. DeRosa et al. (2002), using spherical simulations, have computed flows down to su-

pergranular scales. Actually, the emergence of the three distinct scales of granulation, mesogranulation, and supergranulation in the surface layers, among the observed *continuum* of scales, remains a fully open problem that still deserves much work.

In this Letter, we report new results on three-dimensional numerical simulations of fully compressible turbulent convection in a rectangular box with very large aspect ratio $A = 42.6$. This configuration allows us to study accurately the turbulent dynamics at horizontal scales between granulation and supergranulation, which have not been covered by previous numerical simulations. A compressible fluid is used to provide a more realistic model of photospheric convection than a Boussinesq fluid. Also, density stratification should attenuate the effect of an artificial bottom boundary (Nordlund et al. 1994).

In Sect. 2 we present our numerical setup and physical model. Section 3 is devoted to the analysis of the flow. The main consequences of the results are discussed in Sect. 4, which is followed by a short conclusion.

2. Numerical model and run parameters

For the purpose of our investigations we use a code designed to solve the fully compressible hydrodynamic equations for a perfect gas (*e. g.* Cattaneo et al. 1991) in cartesian geometry. Constant dynamical viscosity and thermal conductivity are assumed. A constant thermal flux is imposed at the bottom, while temperature is held fixed at the surface. The velocity field satisfies stress-free impenetrable boundary conditions. The initial state is a $m = 1$ polytropic atmosphere ($\gamma = 5/3$) with small random velocity v , temperature θ , and density ρ perturbations. The initial density contrast between the bottom and