

Oscillations alfvéniques d'une coquille sphérique de fluide incompressible

B.1 Introduction

B.1.a Avant-propos

À la suite de mon stage de DEA avec Michel Rieutord, j'ai travaillé sur une deuxième thématique en parallèle de mon sujet de thèse, en coencadrant notamment le stage de DEA de Daniel Reese. Ce sujet ne présente pas de lien direct avec la convection solaire, c'est pourquoi il est présenté en marge du reste des résultats de ce manuscrit. Une partie de la résolution du problème (paragraphe B.5) a cependant été réalisée en utilisant des outils mathématiques que j'ai découverts à l'occasion de l'étude du formalisme des problèmes de viscosité turbulente. Seuls les aspects essentiels du problème et de ses implications et un aperçu relativement succinct des résultats obtenus sont présentés ici, le détail complet de cette étude ayant été publié dans deux articles (Rincon et Rieutord 2003, Reese et al. 2004).

B.1.b Oscillations magnétiques stellaires

La motivation originale de ce travail est l'observation de pulsations stellaires fortement influencées par la présence de champs magnétiques forts. Le cas le plus caractéristique est celui des étoiles roAp , découvertes par Don Kurtz en 1978 (voir Kurtz (1990) pour une revue sur le sujet). Ces étoiles possèdent des champs magnétiques intenses (environ 1 kG soit 0.1 T) à leur surface, de géométrie principalement dipolaire. Leur axe de rotation n'est en général pas aligné avec l'axe magnétique (il existe pour cette raison les modèle dits du « pulsateur oblique »

et du « rotateur oblique »). Elles présentent des anomalies chimiques fortes aux pôles magnétiques (Balmforth et al. 2001), ce qui leur a donné le droit d'obtenir l'appellation « Ap » (étoiles de type A avec une composition chimique *particulière*). La partie « ro » signifie quant à elle *rapidly oscillating*. Ces astres oscillent en effet sur des modes acoustiques (p -modes) avec une période courte allant de 5 à 15 minutes. Cependant, au contraire des oscillations acoustiques de notre Soleil, ces pulsations sont fortement anisotropes puisqu'elles sont concentrées aux pôles magnétiques. On connaît une trentaine de ces astres aujourd'hui, mais aucune explication théorique satisfaisante ne permet pour le moment d'expliquer ce phénomène quantitativement (et en particulier de calculer précisément les fréquences d'oscillation).

Compte-tenu des contraintes observationnelles, on ne peut observer que les composantes harmoniques de bas degré $\ell < 4$ de ces pulsations, et la plupart des modèles se sont concentrés sur ces harmoniques. Une des difficultés essentielles du problème est le couplage important entre ondes acoustiques et ondes d'Alfvén dans les couches de surface. En effet, la densité ρ étant nettement plus faible que dans les zones internes, la vitesse d'Alfvén $V_A = B / \sqrt{\rho \mu_0}$ peut y être très importante et devenir comparable à la vitesse des ondes acoustiques, si bien que les théories de perturbation des modes acoustiques par le champ magnétique deviennent inutilisables. Des modèles en perturbations singulières ont certes été élaborés (Biront et al. 1982, Roberts et Soward 1983, Campbell et Papaloizou 1986, Dziembowski et Goode 1996) mais la complexité mathématique du problème n'a guère permis de tirer de conclusions définitives sur la question. Les modèles les plus récents ont soit pris en compte la force de Lorentz de manière empirique (Balmforth et al. 2001), soit négligé les couplages entre harmoniques sphériques de différents degrés (Bigot et Dziembowski 2002), qui, comme nous allons le montrer, peuvent être très importants. Notons dans le travail de Lionel Bigot l'incorporation de la force centrifuge, qui joue un rôle prépondérant dans la dynamique de ces étoiles qui sont des rotateurs rapides.

L'ensemble des considérations précédentes nous a encouragés à commencer par une étude idéalisée du problème, qui permettrait d'isoler les phénomènes les plus importants entrant en jeu dans les pulsations de ces étoiles. Comme on a pu s'en rendre compte, l'incorporation simultanée de toute la complexité physique ne constitue pas une approche viable. Pour commencer, nous nous sommes donc focalisés sur le problème des oscillations alfvéniques *incompressibles* d'une coquille sphérique de plasma conducteur, en utilisant une méthode de résolution *globale, i. e.* prenant en compte un grand nombre de degrés harmoniques. Ce point est essentiel pour la modélisation rigoureuse de la force de Lorentz.

Notons que cette étude ne se rattache pas seulement au problème des étoiles roAp. D'autres étoiles pulsantes abritent en effet des champs magnétiques forts. C'est le cas par exemple de certaines naines blanches (Lou 1995). Enfin, la configuration étudiée ici peut également être utilisée comme un modèle de certains intérieurs planétaires comme celui de Jupiter (Stevenson 1983) dans lequel l'hydrogène, probablement métallisé sous l'effet de pressions gigantesques, possède

une conductivité électrique extrêmement élevée (Celliers et al. 2000) propice à la propagation quasi-adiabatique d'ondes magnétiques. Finalement, remarquons que des études similaires ont déjà été menées en géométrie cylindrique dans le cadre de l'étude des plasmas de laboratoire et des tokamaks (Kerner et al. 1986), ainsi que pour les tubes de flux magnétique dans l'atmosphère solaire (Goossens et al. 2002), et qu'il s'agit de la première tentative en géométrie sphérique.

Le paragraphe qui suit est consacré au formalisme. Les propriétés des solutions axisymétriques du problème sont présentés aux paragraphes B.3 et B.4, et une solution analytique asymptotique pour le cas des modes toroïdaux est dérivée au paragraphe B.5. Les conclusions essentielles de notre étude ainsi que ses perspectives, sont données au paragraphe B.6.

B.2 Oscillations magnétiques en géométrie sphérique

B.2.a Modèle et équations

Une étoile (très) simplifiée

Le modèle adopté est le suivant. Il s'agit de décrire la distribution d'énergie liée à la propagation d'ondes d'Alfvén *de cisaillement* (cf. paragraphe B.2.d) dans une coquille sphérique de plasma incompressible de densité ρ_o , de rayon R , et de rapport d'aspect η , possédant une viscosité cinématique ν et une conductivité électrique σ_o constantes (figure B.1). Cette « étoile » est baignée dans un champ magnétique dipolaire $\mathbf{B} = B_o \cdot R^3 \left(\frac{\cos\theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\sin\theta}{2r^3} \mathbf{e}_\theta \right)$, où r , θ , \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ ont leur définition usuelle en coordonnées sphériques. L'extérieur de l'étoile correspond au vide, le champ magnétique y est donc potentiel, ce qui permet de déterminer les conditions aux limites magnétiques à l'extérieur. Le cœur, quant à lui, est supposé infiniment conducteur électriquement. Des conditions aux limites de type stress-free, plus réalistes du point de vue astrophysique, sont appliquées sur la vitesse.

Les équations linéarisées sans dimension

La vitesse d'Alfvén caractéristique dans le plasma est $V_A = B_o / \sqrt{\rho_o \mu_o}$. Dans ce système, il s'agit de la seule vitesse de propagation que l'on puisse former, en absence de rotation ou de compressibilité. On peut donc procéder à une adimensionalisation des équations usuelles de la magnétohydrodynamique incompressible en prenant comme unité de longueur R , V_A comme unité de vitesse et B_o comme unité de champ magnétique. La recherche d'ondes conduit à linéariser le système pour des perturbations (sans dimension) \mathbf{v} et \mathbf{b} avec des dépendances temporelles de la forme $e^{\lambda t}$, où $\lambda = i\omega + \tau$ (ω est la fréquence et τ le taux de

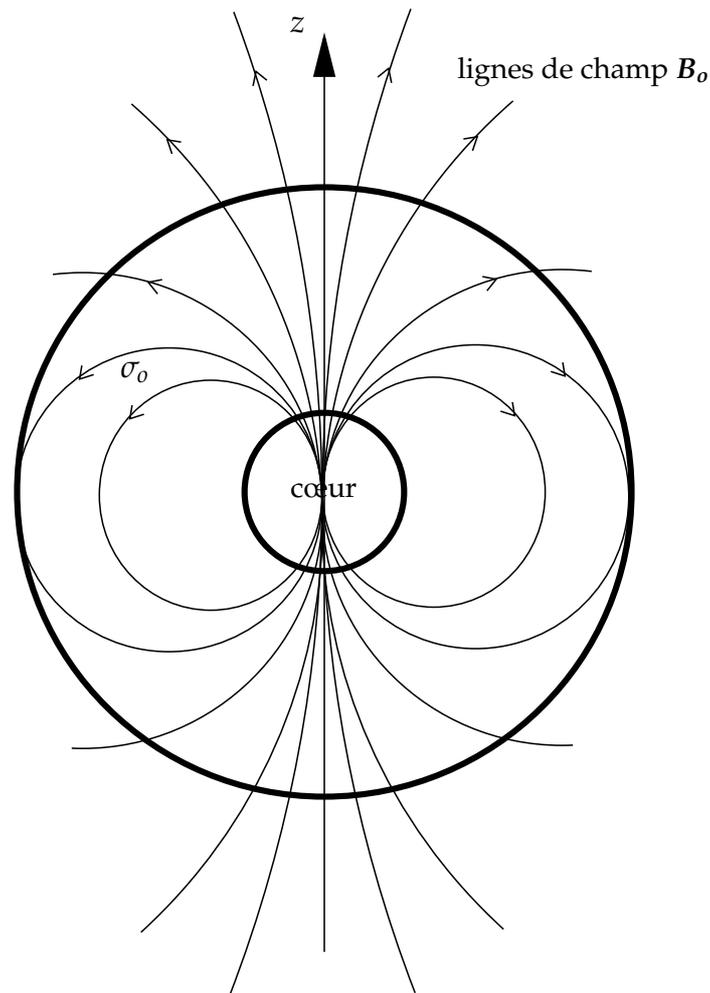


FIG. B.1 – Schéma du modèle de la coquille sphérique magnétisée.

croissance ou d'amortissement du mode, suivant son signe). L'ensemble de ces hypothèses et définitions mène au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
 \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \\
 \lambda \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}) + E \nabla \times \Delta \mathbf{v}, \\
 \lambda \mathbf{b} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + E_m \Delta \mathbf{b}.
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

La première équation correspond à la propriété d'incompressibilité du fluide, la deuxième caractérise le caractère solénoïdal du champ magnétique, la troisième impose la conservation de la quantité de mouvement en présence de la force de Lorentz associée au champ magnétique, tandis que la dernière décrit l'induction magnétique. Les paramètres E et E_m correspondent aux diffusivités adimension-

nalisées¹ :

$$E = \frac{\nu}{RV_A}, \quad E_m = \frac{1}{\sigma_0 \mu_0 RV_A}. \quad (\text{B.2})$$

Typiquement, dans une étoile, ces deux paramètres prennent des valeurs minuscules, de l'ordre de 10^{-13} pour le premier et 10^{-8} pour le second. Notons dès à présent qu'il s'agit d'une des difficultés majeures de l'étude. En effet, avec les capacités numériques actuelles, on ne peut guère descendre en dessous de valeurs de l'ordre de 10^{-6} , et il est par conséquent fort délicat d'extrapoler des résultats obtenus numériquement au cas stellaire. Ceci légitime donc des approches analytiques (lorsqu'elles sont possibles) comme celles données au paragraphe B.5, car elles permettent de savoir si les solutions calculées par un ordinateur sont singulières dans la limite des diffusivités nulles.

Les équations (B.1), si on leur adjoint les conditions aux limites choisies précédemment, constituent un problème aux valeurs propres généralisé, de la forme $\mathcal{A}x = \lambda \mathcal{B}x$, où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux opérateurs, et $x = (v, b)$. Les solutions recherchées sont des couples (λ, x) . La recherche de l'ensemble des valeurs propres solutions λ permet d'obtenir le spectre des ondes d'Alfvén dans ce système.

B.2.b Décomposition harmonique des équations MHD

Afin de résoudre le problème aux valeurs propres en géométrie sphérique il est très pratique de décomposer les vecteurs v et b sur la base des harmoniques sphériques (Rieutord 1987, 1991). On a

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_m^\ell \mathbf{R}_\ell^m + v_m^\ell \mathbf{S}_\ell^m + w_m^\ell \mathbf{T}_\ell^m, \\ b &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_m^\ell \mathbf{R}_\ell^m + b_m^\ell \mathbf{S}_\ell^m + c_m^\ell \mathbf{T}_\ell^m, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où \mathbf{R}_ℓ^m , \mathbf{S}_ℓ^m , et \mathbf{T}_ℓ^m sont les harmoniques sphériques normalisées

$$\mathbf{R}_\ell^m = Y_\ell^m \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{S}_\ell^m = r \nabla Y_\ell^m, \quad \mathbf{T}_\ell^m = r \nabla \times \mathbf{R}_\ell^m. \quad (\text{B.4})$$

$u_m^\ell, v_m^\ell, w_m^\ell, a_m^\ell, b_m^\ell, c_m^\ell$ dépendent uniquement de la variable r . (u_m^ℓ, v_m^ℓ) et (a_m^ℓ, c_m^ℓ) sont des composantes poloïdales, et w_m^ℓ et b_m^ℓ sont des composantes toroïdales. On doit ensuite utiliser l'expression des divers opérateurs dans la base harmonique pour développer le système (B.1). L'ensemble des résultats de ce calcul est donné dans Rincon et Rieutord (2003). Notons simplement que les relations imposant la divergence nulle permettent de se débarrasser de v_m^ℓ et b_m^ℓ dans les calculs.

Pour résoudre le problème numériquement il est bien entendu nécessaire de le discrétiser. Le développement (B.3) assure cela pour les variables angulaires. Une

¹la lettre E a été choisie pour des raisons historiques propres à l'équipe de dynamique des fluides astrophysiques de Toulouse. E désignant habituellement le nombre d'Ekman, le lecteur averti devinera aisément la personne à l'origine de ce choix.

discrétisation sur des polynômes de Chebyshev est effectuée dans la direction radiale. Celle-ci possède deux propriétés très importantes. Elle permet en premier lieu de mettre beaucoup de points près des bords du domaine, où des couches limites peuvent se former. Ensuite, la convergence des solutions est spectrale (la précision du calcul augmente exponentiellement avec le nombre de points utilisés), ce qui en fait une méthode robuste et précise. En pratique, on tronque les développements à L harmoniques sphériques et N_r polynômes de Chebyshev. On peut obtenir à l'heure actuelle une résolution maximale de l'ordre de 1000 harmoniques pour 400 Chebyshev (avec un seul m), sur le ordinateur vectoriel NEC de l'IDRIS.

Le code de résolution de problèmes linéaires LSB, développé par Lorenzo Valdettarro et Michel Rieutord, permet de résoudre le problème en utilisant soit une méthode directe basée sur l'algorithme QZ calculant l'ensemble du spectre (mais avec une mauvaise précision sur les vecteurs propres), soit une méthode itérative de type Arnoldi-Chebyshev calculant un ensemble limité (mais avec une très bonne précision) de valeurs propres et de vecteurs propres autour d'un point $\lambda = i\omega + \tau$ donné du plan complexe.

B.2.c Symétries et classification des modes propres

Dans le problème posé, un couplage entre harmoniques sphériques est imposé par la présence du champ magnétique, qui brise la symétrie sphérique. La dépendance du champ permanent en $\cos \theta$ couple l'harmonique ℓ aux harmoniques $\ell + 1$ et $\ell - 1$. Comme le champ est axisymétrique, aucun couplage entre m n'est présent (ce n'est plus le cas lorsqu'on introduit un axe de rotation incliné par rapport à l'axe magnétique (Bigot et Dziembowski 2002)). Les solutions se divisent alors en deux catégories axisymétrique ($m = 0$) et non-axisymétrique ($m \neq 0$). On pourra se convaincre en regardant l'annexe A de Rincon et Rieutord (2003) que pour la première catégorie, les variables poloïdales (u_m^ℓ, a_m^ℓ) d'une part, et toroïdales (w_m^ℓ, c_m^ℓ) d'autre part, sont découplées, et que le champ de vitesse et le champ magnétique ont toujours des parités opposées par rapport au plan équatorial (ℓ pairs pour la vitesse, ℓ impairs pour le champ magnétique ou vice-versa). Cela conduit naturellement à introduire la classification suivante pour l'ensemble des modes propres :

$$\text{Axisymétrique} \begin{cases} \mathbf{x}_\lambda = (u_0^1, a_0^2, \dots, u_0^{2\ell-1}, a_0^{2\ell}, \dots) & \text{impair poloïdal,} \\ \mathbf{x}_\lambda = (a_0^1, u_0^2, \dots, a_0^{2\ell-1}, u_0^{2\ell}, \dots) & \text{pair poloïdal,} \\ \mathbf{x}_\lambda = (w_0^1, c_0^2, \dots, w_0^{2\ell-1}, c_0^{2\ell}, \dots) & \text{pair toroïdal,} \\ \mathbf{x}_\lambda = (c_0^1, w_0^2, \dots, c_0^{2\ell-1}, w_0^{2\ell}, \dots) & \text{impair toroïdal,} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Non-axisymétrique} \begin{cases} \mathbf{x}_\lambda = (u_m^{m+2k}, w_m^{m+2k+1}, a_m^{m+2k+1}, c_m^{m+2k}) & \text{pair,} \\ \mathbf{x}_\lambda = (u_m^{m+2k+1}, w_m^{m+2k}, a_m^{m+2k}, c_m^{m+2k+1}) & \text{impair.} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Nous nous contenterons ici de décrire les modes axisymétriques, les modes non axisymétriques ayant des comportements proches de l'une des deux familles poloïdale ou toroïdale (Reese et al. 2004). Auparavant, il peut être utile de rappeler les propriétés essentielles des ondes d'Alfvén.

B.2.d Les ondes d'Alfvén en résumé

Comme leur nom l'indique, ces ondes ont été découvertes par Hannes Alfvén dans les années 1940 (*e. g.* Alfvén 1945). Elles correspondent aux vibrations des lignes de champ magnétique couplées aux vibrations du champ de vitesse. Le caractère ondulatoire est lié à la force de Lorentz, qui agit comme une force de rappel sur les éléments fluides déplacés perpendiculairement aux lignes de champs. Pour un développement en ondes planes \mathbf{k} , la relation de dispersion sans dimension est donnée par (Chandrasekhar 1961)

$$-(\lambda + E_m k^2)(\lambda + Ek^2) = k^2 \cos^2 \theta, \quad (\text{B.7})$$

où θ est l'angle entre le vecteur d'onde \mathbf{k} et la ligne de champ (parallèle à \mathbf{B}). En absence de dissipation, on a

$$\frac{\omega}{k} = \cos \theta. \quad (\text{B.8})$$

La vitesse de groupe de l'onde est alors proportionnelle à $\cos \theta$. Si en revanche on décide de tenir compte de la dissipation, le taux d'amortissement est donné par

$$\tau = -\frac{k^2 (E_m + E)}{2}. \quad (\text{B.9})$$

On rappelle finalement que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0$. La relation (B.8) montre qu'il n'y a propagation que si le vecteur d'onde a une composante longitudinale et que l'énergie se propage uniquement le long de la ligne de champ. L'équation (B.9) montre quant à elle que les deux termes diffusifs jouent un rôle symétrique pour des ondes planes.

B.3 Modes axisymétriques poloïdaux

Pour tout renseignement détaillé sur l'étude de ces modes, le lecteur intéressé pourra se référer à Rincon et Rieutord (2003).

B.3.a Modes stationnaires

Une première famille de modes, qui a pour principale propriété $\omega = 0$, ne présente pas spécialement d'intérêt pour l'astérosismologie, si ce n'est qu'il s'agit d'un canal possible de dissipation d'énergie dans une étoile. Les modes appartenant à cette famille ne possèdent pas de nœuds dans la direction parallèle aux

lignes de champ, et correspondent chacun à un nombre de nœuds différent dans la direction perpendiculaire (figure B.2). Le taux d'amortissement augmente avec le nombre de nœuds, ce qui est qualitativement représentatif de la relation (B.9).

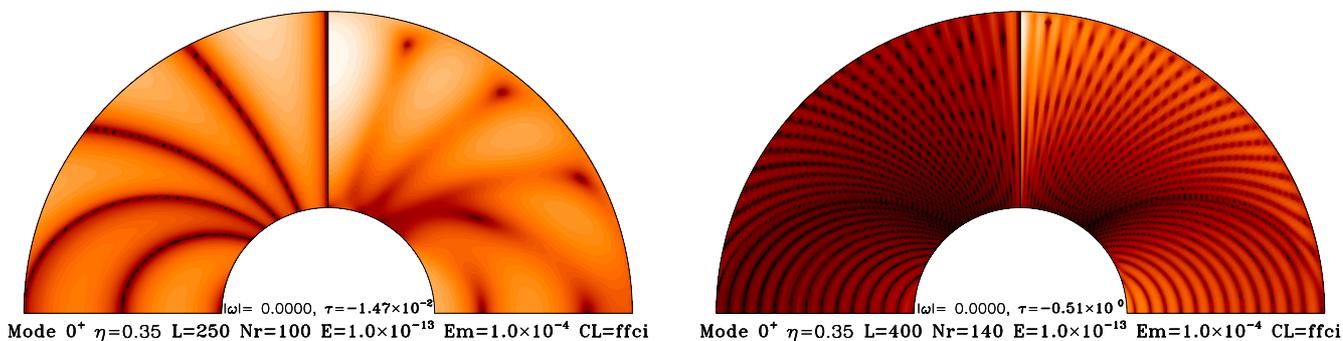


FIG. B.2 – Deux modes stationnaires avec des taux d'amortissement différents. Dans chaque cas, il s'agit d'une coupe méridionale de la coquille sphérique. Compte-tenu de la symétrie équatoriale seul l'hémisphère nord est représenté. Le quart droit correspond à l'énergie magétique b^2 et le quart gauche à la dissipation ohmique $|\nabla \times \mathbf{b}|^2$ (échelle des couleurs logarithmique).

B.3.b Modes oscillants

Spectre et propriétés générales

Lorsque $\omega \neq 0$, la situation devient nettement plus intéressante. Pour commencer, le spectre des valeurs propres (figure B.3) dans le plan complexe devient plus compliqué. Une double quantification est observée : la première concerne principalement la fréquence, tandis que la seconde affecte essentiellement le taux d'amortissement. Qualitativement, on trouve que la première correspond à la quantification du nombre de nœuds n des modes le long de la ligne de champ (et donc de la composante parallèle du vecteur d'onde), la seconde ressemblant à celle des modes stationnaires. Ceci est illustré par les figures B.4 et B.5.

La propriété essentielle de ces modes est qu'ils se focalisent sur les pôles, quelque soit la fréquence. La quantification du spectre par rapport aux pulsations peut alors être calculée de manière asymptotique en se plaçant sur le pôle et en utilisant une analyse de type WKB (Bender et Orzag 1978) pour $\omega \rightarrow \infty$. On arrive à la règle de quantification

$$\omega_n = \frac{2(2n+1)\pi}{1-\eta^4}, \quad (\text{B.10})$$

qui donne un bon accord avec les résultats numériques (tableau B.1). Enfin, l'étude du spectre harmonique (figure B.6) permet de voir que les couplages entre ℓ restent très importants jusqu'à $\ell = 60$. Pour le mode dont le spectre est représenté

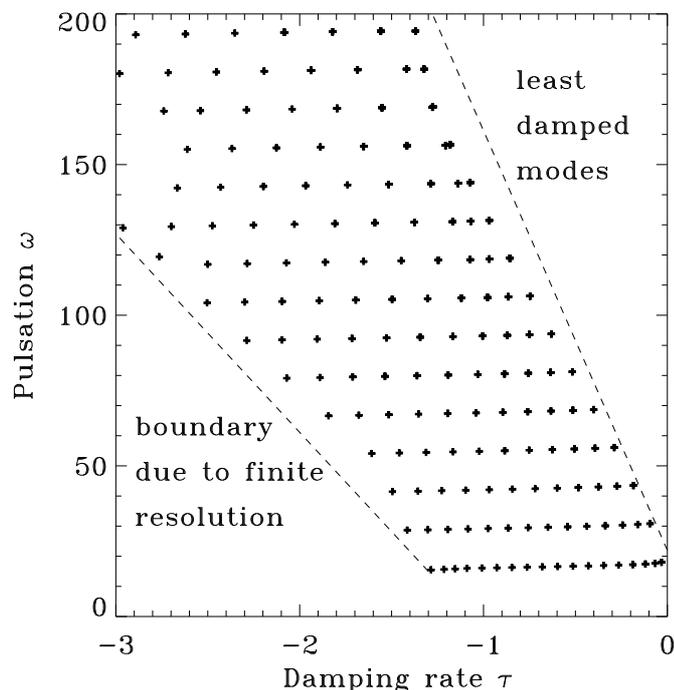


FIG. B.3 – Spectre des valeurs propres des modes poloïdaux pour $\eta = 0.35$, $E_m = 10^{-4}$, $E = 10^{-13}$. La région en bas à gauche n'est pas explorée numériquement, mais contient très certainement des valeurs propres. En revanche, il n'y a aucune valeur propre dans la région en haut à droite du spectre, ce qui est une conséquence de la relation de dispersion (B.8) et de l'équation (B.9), qui donne qualitativement $\omega_{\max} \propto \sqrt{|\tau|}$.

sur la figure B.6, on voit même que le maximum du spectre est obtenu pour $\ell = 14$, ce qui montre qu'il peut être risqué de ne pas tenir compte de ces couplages dans les modèles d'oscillations magnétiques.

B.3.c Couches de cisaillement internes

Pour finir, on peut noter que la structure polaire des modes pour $\ell \leq 60$ est régulière (autrement dit elle garde une largeur σ_θ finie lorsque les diffusivités tendent vers 0). En revanche, les couches internes visibles sur la figure B.5 sont singulières et leur finesse complique considérablement l'étude numérique à faible diffusivité. Pour le voir, on a représenté sur la figure B.7 un mode propre pour $\eta = 0.9$, et le même mode en ne gardant que les composantes harmoniques de haut degré. Les couches internes deviennent alors nettement plus apparentes. Elles correspondent à des résonances associées à la fréquence du mode, le nombre de nœuds augmentant d'une unité sur chaque ligne résonante (ce qui est permis puisqu'au fur et à mesure qu'on se dirige vers l'équateur, la longueur des lignes

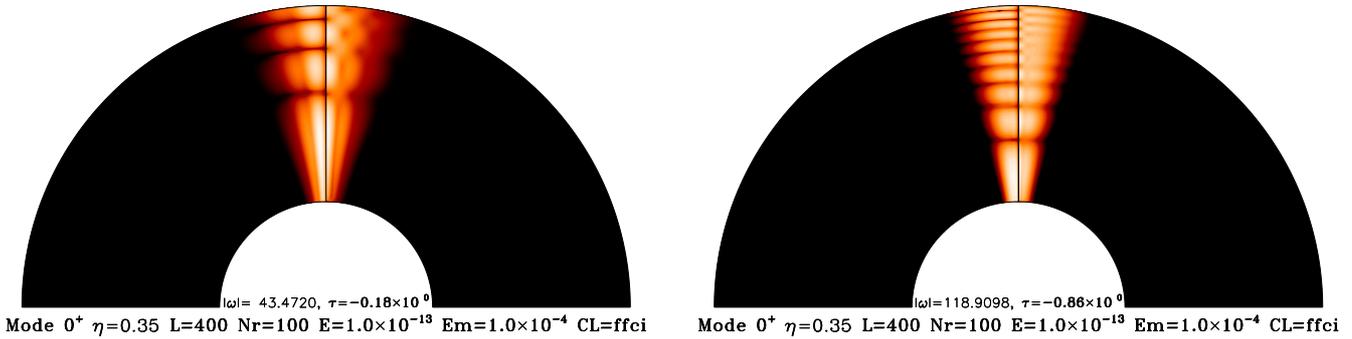


FIG. B.4 – Distribution méridionale du courant (quart gauche) et de l'énergie magnétique (quart droit) pour deux modes propres avec des pulsations différentes. Chaque mode possède un nombre de nœuds différent suivant les lignes de champ.

n	ω_n	ω_{num}
1	19.14	18.00
2	31.89	30.82
3	44.65	43.50
4	57.41	56.14
5	70.17	68.77
6	82.93	81.40
7	95.68	94.02
8	108.4	106.7
9	121.2	119.3

TAB. B.1 – Comparaison entre les pulsations obtenues dans l'approximation WKB ($\eta = 0.35$) et par le numérique. Compte-tenu des hypothèses de l'approximation, il est logique que la précision relative de la solution WKB soit meilleure lorsque la pulsation est élevée.

de champ à l'intérieur de la coquille augmente).

B.4 Modes axisymétriques toroïdaux

Les modes toroïdaux ont globalement les mêmes propriétés que leurs cousins poloïdaux. La différence essentielle entre les deux types de modes est assez bien dissimulée mais n'en est pas moins essentielle. Nous allons en effet montrer qu'ils sont singuliers dans la limite des diffusivités nulles. Leur étude est néanmoins fort instructive puisqu'elle est plus simple et que des développements analytiques

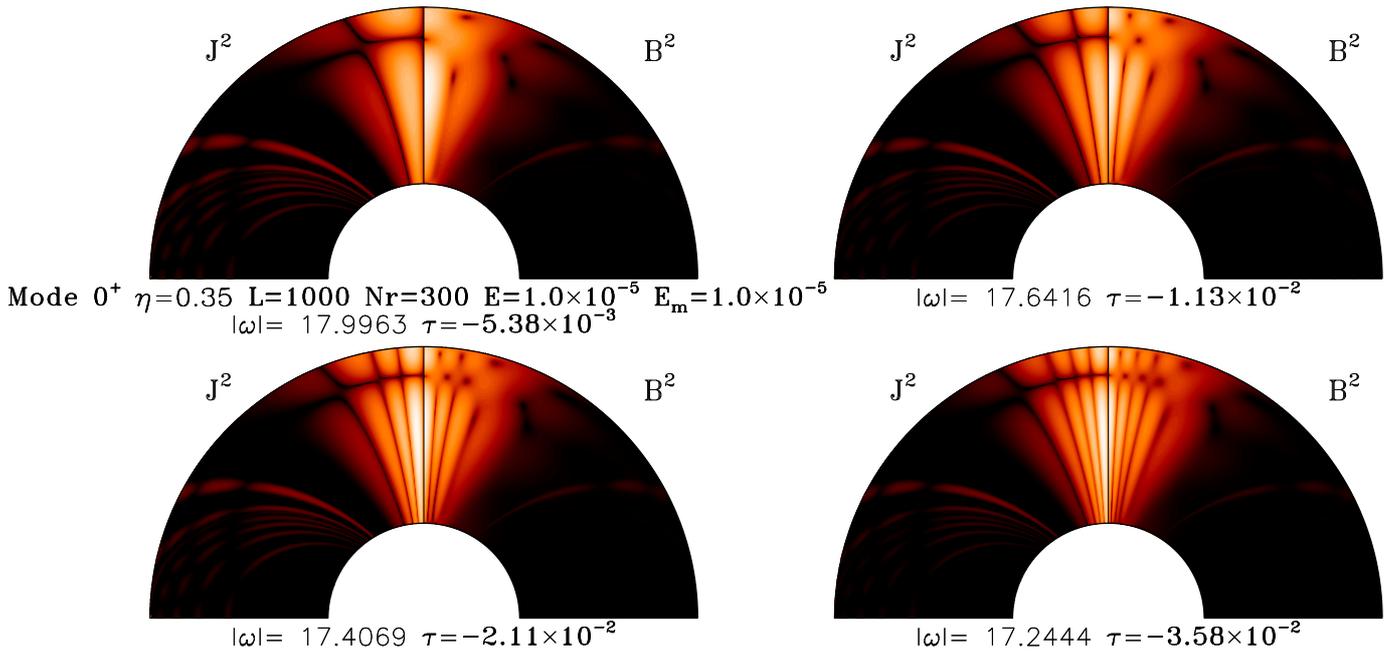


FIG. B.5 – Distribution meridionale du courant (quart gauche) et de l'énergie magnétique (quart droit) pour quatre modes propres poloïdaux possédant des pulsations similaires $\omega \simeq 18$ mais des taux d'amortissement différents. On a utilisé ici $E_m = E = 10^{-5}$, 1000 harmoniques sphériques et 300 polynômes de Chebyshev, afin de faire ressortir au maximum la structure interne du mode aux alentours de 45° .

sont possibles. Nous allons voir au paragraphe B.5 que ces développements nous apprennent également potentiellement des choses sur le spectre des modes poloïdaux. Le lecteur intéressé trouvera tous les renseignements détaillés sur l'étude de ces modes dans Reese et al. (2004).

B.4.a Spectre

Pour faire simple, le spectre des modes toroïdaux, donné sur la figure B.8, s'interprète essentiellement comme celui des modes poloïdaux, à savoir qu'une double quantification sur le nombre de nœuds n suivant les lignes de champ et q perpendiculairement à celles-ci est obtenue. Des représentations des vecteurs propres correspondants sont présentées dans Reese et al. (2004). Tout comme les modes poloïdaux, ces modes se concentrent aux pôles magnétiques.

B.4.b Singularité et couches limites

On observe numériquement que la largeur caractéristique σ_θ de ces modes tend vers 0 à mesure que l'on réduit la diffusivité, ce qui ne semble pas être le cas pour les modes poloïdaux. Cela signifie que leur structure est singulière. Ce

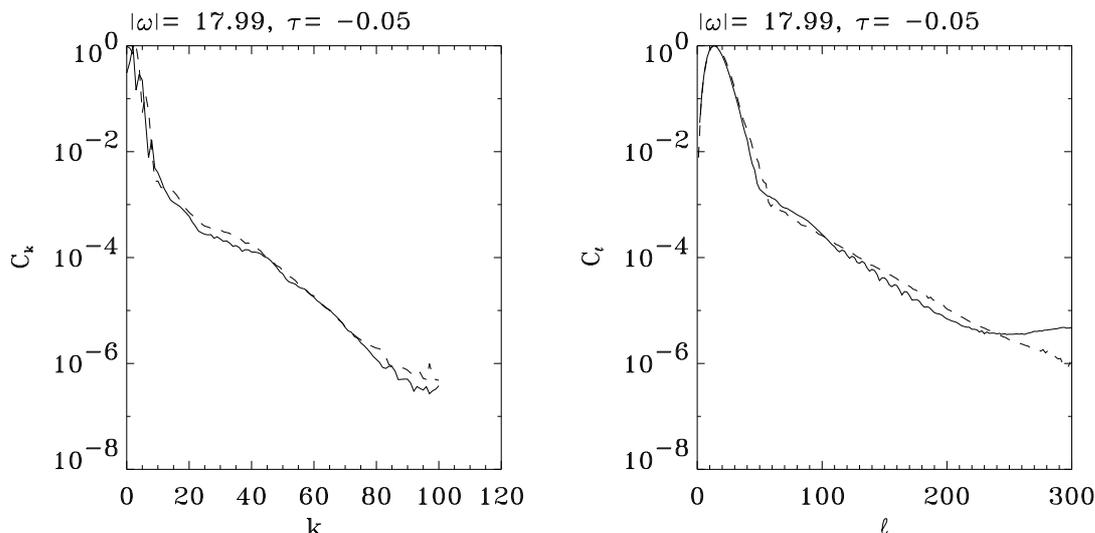


FIG. B.6 – Spectres de l'énergie magnétique (trait plein) et de la vitesse (pointillés) pour le premier mode de la figure B.5, mais lorsque $E = E_m = 10^{-4}$. À gauche : maximum sur toutes les harmoniques sphérique de chacun des coefficients de Chebyshev C_k . À droite : spectre harmonique, correspondant au maximum sur tous les coefficients de Chebyshev de la composante harmonique ℓ (en valeur absolue). Sur ce dernier spectre, on voit nettement la composante polaire du mode ($\ell \leq 60$) et la contribution des couches internes ($\ell > 60$).

comportement est illustré par la figure B.9. Finalement, Daniel Reese a montré que les couches limites associées à ces modes sont des couches de Hartmann, d'épaisseur caractéristique $\mathcal{O}(B^{-1}\sqrt{EE_m})$, et qu'on peut modéliser par une variation exponentielle près des bords (Pothérat et al. 2002). La fabrication d'un spectre synthétique basé sur ce profil permet en effet de retrouver de manière très précise la forme du spectre en Chebyshev pour les polynômes de degré élevé, correspondant aux structures de très faible épaisseur.

B.5 Solutions asymptotiques à faible diffusivité

Concluons cette étude par l'exposé des grandes lignes d'un développement analytique asymptotique mené conjointement avec Daniel Reese, qui permet de déterminer le comportement des modes toroïdaux à faible diffusivité. Le calcul est basé sur un développement des solutions en puissance des diffusivités et sur l'utilisation de l'alternative de Fredholm pour obtenir la solution au deuxième ordre. Pour commencer, on observe empiriquement pour $E = E_m$ (cf. Reese et al. 2004) que la forme des valeurs propres pour les doublets (n, q) est

$$\lambda_{n,q} = \lambda_n^0 + E^{1/2}(q+1)\Lambda_n^1 + \mathcal{O}(E), \quad (\text{B.11})$$

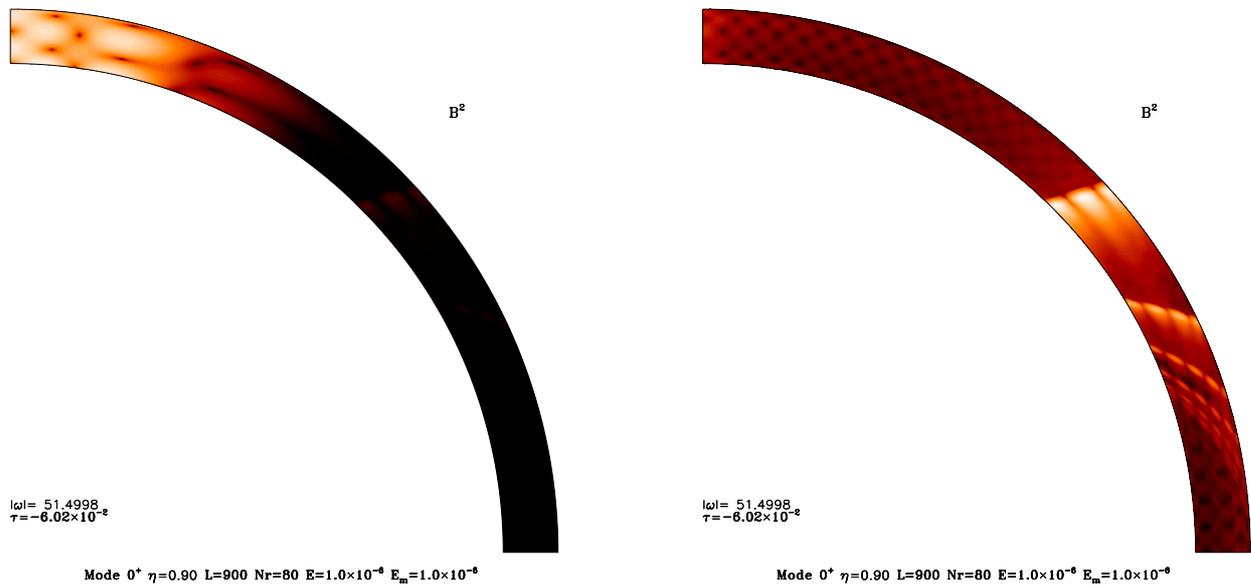


FIG. B.7 – À gauche : énergie magnétique d'un mode poloïdal $n = 1$ dans une coquille sphérique avec $\eta = 0.9$. À droite : le même mode, filtré à $\ell > 60$, possède des lignes de champ résonantes avec un nombre de nœuds allant de 2 à 7.

où λ_n^0 correspond à la fréquence « adiabatique » et Λ_n^1 est un nombre complexe qui ne dépend pas de q (constant sur chaque branche horizontale). Autrement dit, il semble possible de séparer une contribution adiabatique et une contribution non-adiabatique dans la valeur propre. Il s'agit alors de trouver une justification analytique à cette expression du spectre. La quantification verticale est relativement aisée et repose essentiellement sur les mêmes idées que celles de l'analyse WKB du paragraphe B.3. En revanche, la quantification horizontale est nettement plus compliquée à obtenir.

Un point essentiel, évoqué dans le paragraphe précédent, est que la largeur des modes toroïdaux varie comme $E^{1/4}$ lorsque les diffusivités E et E_m sont abaissées simultanément. Ceci permet de réécrire les équations grâce à un changement de variables $(r, \nu = \sin \theta / \sqrt{r}, \varphi)$, où ν est la coordonnée perpendiculaire à la ligne de champ. Si on pose $E^{1/4} = (K\varepsilon)^{1/4}$, $E_m^{1/4} = (K_m\varepsilon)^{1/4}$, et $\hat{\nu} = \varepsilon^{-1/4}\nu$, où ε est petit lorsque les diffusivités sont petites, et K et K_m sont des constantes, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda v &= \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}r\hat{\nu}^2\right) \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{3b}{2r^4} \right] + \frac{\varepsilon^{1/2}K}{r^3} \Theta[v], \\ \lambda b &= \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}r\hat{\nu}^2\right) \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{3v}{2r^4} \right] + \frac{\varepsilon^{1/2}K_m}{r^3} \Theta[b], \end{aligned} \tag{B.12}$$

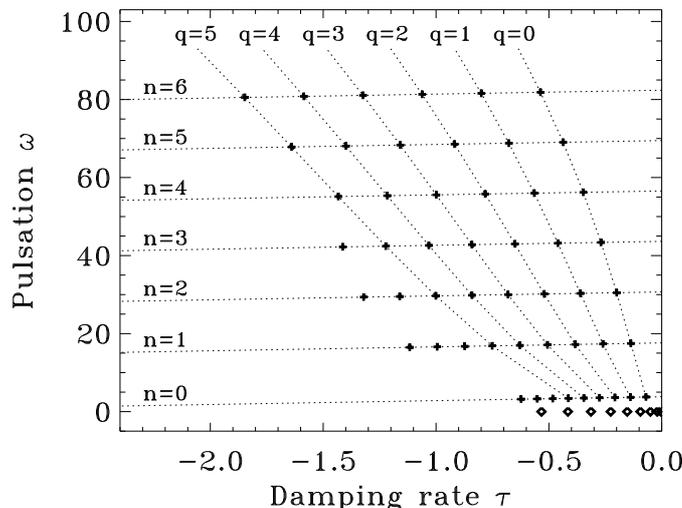


FIG. B.8 – Spectre des valeurs propres des modes toroïdaux pour $\eta = 0.35$, $E = E_m = 10^{-4}$. L'entier n indexe le nombre de nœuds des solutions suivant la coordonnée de ligne de champ, et q le nombre de nœuds dans la direction perpendiculaire.

où

$$\Theta[b] = \frac{\partial^2 b}{\partial \hat{v}^2} + \frac{1}{\hat{v}} \frac{\partial b}{\partial \hat{v}} - \frac{b}{\hat{v}^2} \quad (\text{B.13})$$

est le seul opérateur qui dépend de \hat{v} . Un développement en puissances de ε , conduisant à une hiérarchie d'équations, s'impose naturellement au vu de l'équation (B.11) :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^0 + \varepsilon^{1/2} \lambda^1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ v &= v^0 + \varepsilon^{1/2} v^1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ b &= b^0 + \varepsilon^{1/2} b^1 + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Au premier ordre le système obtenu ne dépend pas de la coordonnée \hat{v} , ce qui permet de trouver des expressions de la forme

$$\begin{aligned} b^0(r, \hat{v}) &= b_n^0(r) f(\hat{v}), \\ v^0(r, \hat{v}) &= v_n^0(r) f(\hat{v}), \\ \lambda^0 &= \lambda_n^0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Les fonctions $b_n^0(r)$ et $v_n^0(r)$ peuvent être obtenues en faisant une analyse sur le pôle et donnent la quantification verticale. En revanche, à cet ordre, la fonction

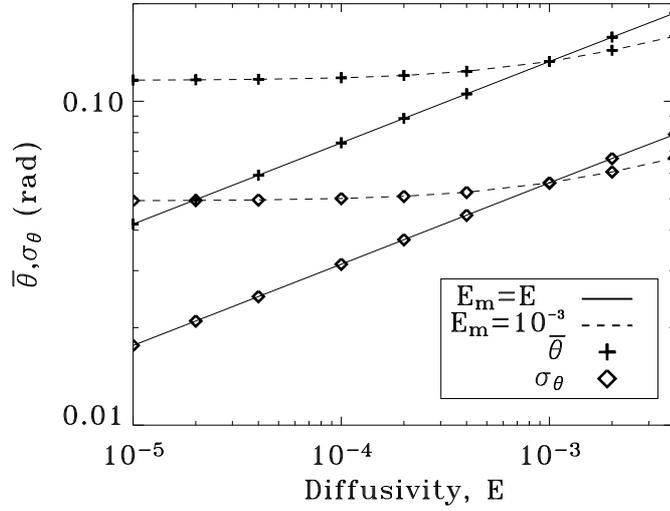


FIG. B.9 – Comportement de la largeur caractéristique σ_θ et de la distance au pôle $\bar{\theta}$ d'un mode propre. Dans le cas $E = E_m$, ces deux grandeurs tendent vers zéro, et la pente observée est égale à $1/4$.

$f(\hat{v})$ est encore indéterminée. À l'ordre 1, on a

$$\begin{aligned} \lambda_n^0 b^1 - \frac{1}{r^3} \frac{\partial v^1}{\partial r} + \frac{3v^1}{2r^4} &= -\lambda^1 b_n^0 f - \frac{\lambda_n^0 r \hat{v}^2 b_n^0 f}{2} + \frac{K_m b_n^0 \Theta[f]}{r^3}, \quad b^1(r=1, \hat{v}) = 0, \\ \lambda_n^0 v^1 - \frac{1}{r^3} \frac{\partial b^1}{\partial r} - \frac{3b^1}{2r^4} &= -\lambda^1 v_n^0 f - \frac{\lambda_n^0 r \hat{v}^2 v_n^0 f}{2} + \frac{K v_n^0 \Theta[f]}{r^3}, \quad v^1(r=\eta, \hat{v}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Formellement, ce système peut s'écrire $\mathcal{L}_0 \Psi_1 = \mathcal{L}_1 \Psi_0$, où \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 sont deux opérateurs et Ψ_0 et Ψ_1 les solutions aux premiers ordres (\mathcal{L}_1 contient en particulier l'opérateur Θ). En vertu de l'alternative de Fredholm (que l'on suppose valable pour les fonctions et opérateurs utilisés ici), une solution n'est possible que si les solutions du problème homogène pour l'adjoint \mathcal{L}_0^\dagger sont orthogonales au membre de droite. On peut noter que l'opérateur \mathcal{L}_0 , qui est donné par l'équation (B.12), est auto-adjoint (c'est l'opérateur idéal de la MHD) et que les solutions du problème adjoint sont donc précisément données par l'équation (B.15). En appliquant l'alternative de Fredholm, une équation simplifiée sur la fonction f est alors obtenue :

$$-\lambda^1 \mathcal{C}_1 f - \frac{\lambda_n^0 \hat{v}^2 \mathcal{C}_2}{2} f + \mathcal{C}_3 \Theta[f] = 0. \quad (\text{B.17})$$

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ sont des constantes qui s'expriment en fonction de la norme des vecteurs propres solutions au premier ordre, qui sont calculés exactement dans Reese et al. (2004). Un nouveau changement de variables permet de transformer l'équation précédente en une équation dont les solutions sont les fonctions de Kummer

(Abramowitz et Stegun 1954). Les conditions aux limites de régularité au pôle et à l'infini, appliquées sur ces fonctions, permettent d'obtenir une quantification rigoureuse de la valeur propre λ^1 avec un nombre quantique q , avec des fonctions propres proportionnelles aux polynômes de Legendre généralisés. On a finalement

$$\begin{aligned}\lambda_{n,q} &= \lambda_n^0 + \varepsilon^{1/2} \lambda_{n,q}^1 + \mathcal{O}(E), \\ \lambda_n^0 &= i\omega_n^0 \simeq i \frac{2(2n+1)\pi}{1-\eta^4}, \\ \lambda_{n,q}^1 &= -2(1+q)(1+i) \frac{\sqrt{\omega_n^0 C_2 C_3}}{C_1}.\end{aligned}\tag{B.18}$$

Cette solution correspond parfaitement à l'équation (B.11) qui, rappelons-le, était purement empirique. Les profils transverses (suivant la variable sphérique θ) de différents vecteurs propres calculés numériquement et par notre méthode sont donnés dans la figure B.10 et confirment ce bon accord.

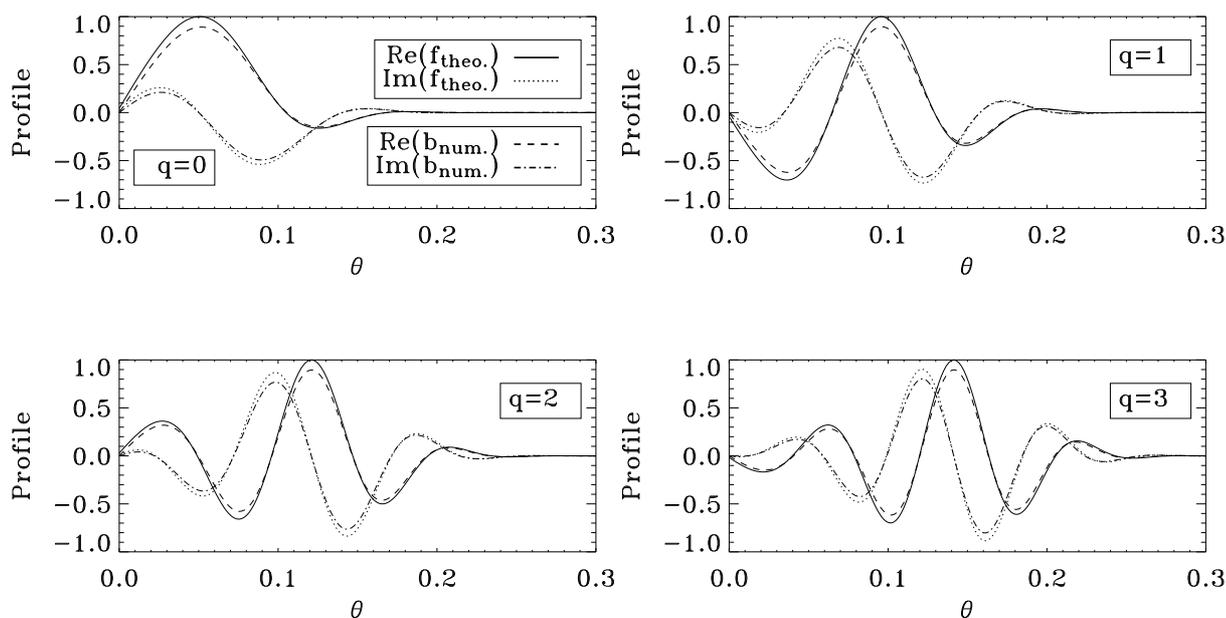


FIG. B.10 – Comparaison entre la théorie asymptotique et les résultats numériques pour des profils transverses de champ magnétique, $r = 0.5$ et des diffusivités égales à $4 \cdot 10^{-5}$.

Ce développement confirme donc que la structure des modes toroïdaux est singulière. Cette différence avec le cas poloidal, fondamentale, semble due à l'absence de couplage entre lignes de champ par la pression totale dans le cas toroïdal. En effet, le gradient de pression s'annule sur la composante toroïdale des équations pour des perturbations axisymétriques, ce qui n'est pas le cas pour les autres composantes. Cependant, le mécanisme de quantification horizontale, qui

se fait par l'intermédiaire des termes diffusifs, doit être similaire pour les modes poloïdaux, les mêmes comportements de quantification étant observés pour les deux familles de modes.

B.6 Conclusions et extensions possibles

B.6.a Principaux résultats

Les conclusions essentielles de cette étude sont les suivantes. Les modes d'oscillation alfvéniques ont une distribution spatiale fortement anisotrope et se concentrent principalement aux pôles. Les couplages harmoniques créés par la présence d'un champ magnétique dipolaire imposent que l'on prenne en compte au moins 60 harmoniques sphériques pour obtenir la structure principale du mode pour des ondes d'Alfvén pures. Même si le spectre et la forme des modes propres magnéto-acoustiques (qui sont les modes observés dans les étoiles roAp) sont certainement très différents de ceux pour les ondes d'Alfvén pures, cet aspect précis du problème doit vraisemblablement être pris en compte dans l'étude des premiers. De manière plus générale, une étude globale (sur l'ensemble de la couche) paraît nécessaire.

Nous avons vu que les modes poloïdaux, même s'ils ressemblent fortement aux modes toroïdaux, sont fondamentalement différents de ceux-ci puisque leur structure semble rester régulière aux faibles diffusivités. Une étude analytique du spectre toroïdal, en complément des solutions numériques, a permis de montrer la singularité des modes toroïdaux et d'obtenir la dépendance de l'épaisseur de ces modes vis-à-vis des diffusivités.

B.6.b Perspectives

L'étape suivante consiste bien entendu à prendre en compte la compressibilité du milieu afin d'obtenir le spectre des modes magnéto-acoustiques lents et rapides. Une telle étude s'avère nettement plus compliquée à la fois analytiquement et numériquement, puisque les variables u_m^ℓ et v_m^ℓ doivent séparément être calculées et que la variable de densité doit être rajoutée. Il y a de fortes chances pour que les solutions soient assez différentes de celles présentées ici.

Ce travail offre également des perspectives intéressantes dans le cadre de l'étude des mécanismes de chauffage à l'intérieur des planètes géantes à fort champ magnétique comme Jupiter. Un problème important, que les modèles de transfert radiatif actuels ne permettent pas de résoudre, est d'expliquer l'excès de chauffage observé aux pôles de l'atmosphère de Jupiter (Pirraglia 1984). Compte tenu de la forte conductivité de l'hydrogène à grande profondeur, il pourrait être possible de canaliser de l'énergie préférentiellement vers les pôles magnétiques par des ondes d'Alfvén. Un travail préliminaire avec R. Ouyed (Université de Calgary) semble indiquer qu'une excitation même relativement faible de

ces ondes (avec des perturbations de vitesse de l'ordre de quelques cm s^{-1} , en accord avec les estimations actuelles sur la turbulence dans l'intérieur de la planète (Starchenko et Jones 2002) est suffisante pour extraire l'énergie nécessaire au chauffage. Un tel mécanisme demande cependant une étude plus approfondie, et une modélisation de la transition de phase du plasma (par le biais d'une résolution multi-domaine du problème) reste à faire. Notons finalement que l'axe du champ magnétique de Jupiter n'est pas aligné avec l'axe de l'anisotropie calorifique (l'écart est de 10° , *e. g.* Rädler et Ness (1990)), et que le champ magnétique permanent possède vraisemblablement des composantes poloïdales et toroïdales non dipolaires importantes à l'intérieur, ce qui pourrait compromettre l'analyse.



Oscillations of magnetic stars: I. Axisymmetric shear Alfvén modes of a spherical shell in a dipolar magnetic field

F. Rincon^{1,2} and M. Rieutord^{1,3}

¹ Laboratoire d’Astrophysique de Toulouse, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue É. Belin, 31400 Toulouse, France

² École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d’Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

³ Institut Universitaire de France

Received 15 May 2002 / Accepted 5 November 2002

Abstract. We carry out an investigation of axisymmetric shear Alfvén waves in a spherical layer of an incompressible resistive fluid when a strong dipolar magnetic field is applied. A decomposition on the spherical harmonics base is used to compute the eigenmodes of the system. Numerical results show that the least-damped Alfvénic modes naturally concentrate near the magnetic polar axis. These modes also show internal shear/magnetic layers associated with resonant field lines. This model is useful when modelling planetary cores sustaining a dynamo, magnetic neutron stars or to the magnetic layer of roAp stars. In this latter case, it shows that shear Alfvén waves provide a good instance of non-perturbative effects due to the strong magnetic field of such stars.

Key words. MHD – stars: oscillations – stars: magnetic fields – stars: chemically peculiar

1. Introduction

Asteroseismological observations of roAp stars over the last twenty years (Kurtz 1990) have raised the question of the understanding of the oscillations in a star when a global and permanent magnetic field is present. Non-radial oscillations of roAp stars have periods between 4 and 16 min. The observed photometric variations indicate that they are likely high-order, low-degree p -modes, perturbed by some physical process related to the presence of a permanent magnetic field, which is known to be mainly dipolar at the surface of these stars. One of the arguments in favor of this interpretation is that the oscillations can be interpreted with the so-called “oblique rotator” model of Kurtz (1990) which considers the oscillations as essentially $\ell = 1$ modes aligned with the dipolar magnetic field of the star. Recently, Bigot & Dziembowski (2002) noticed that this alignment need not be strict and that the pulsation axis lies somewhere between the rotation and magnetic axis.

Balmforth et al. (2001) suggested that oscillations were likely to be excited near the poles of the star rather than near the equator because in the first case, the magnetic field is almost vertical and inhibits convection (in a frozen field picture), allowing some κ -mechanism excitation, whereas in the second case, magnetic field lines are nearly horizontal, permitting turbulent convective motions and thus preventing any

κ -mechanism. Although this kind of separated treatment between the magnetic pole and the equator is sufficient to recover some properties of the roAp stars, Balmforth et al. (2001) acknowledge that their model has some drawbacks, mainly their neglect of the direct contribution of the Lorentz force to the momentum equation.

Other previous studies by Shibahashi (1983) and Cox (1984) made a more satisfactory treatment of the magnetic field by taking it into account explicitly in the equations. They discovered that convective overstable magneto-gravity modes could be excited at the poles of the star rather than at the equator and found that the oscillation periods of their model were comparable to those observed in roAp stars. However, as they pointed out, they only made a local analysis which is not sufficient to describe the probable global nature of roAp oscillations.

As Biront et al. (1982), Roberts & Soward (1983) and Campbell & Papaloizou (1986) explained, the study of oscillations in presence of a magnetic field is a difficult mathematical problem, since magnetic fields can be treated as small perturbations in the interiors of stars but give a major contribution to the pressure in the atmospheres, where regular perturbative methods consequently break down. Dziembowski & Goode (1996) and Bigot et al. (2000), following up the work of Roberts & Soward (1983), calculated the shift of p -modes frequencies induced by the presence of a strong dipolar magnetic field in a boundary layer approximation. They found that these shifts

Oscillations of magnetic stars

II. Axisymmetric toroidal and non-axisymmetric shear Alfvén modes in a spherical shell^{*}

D. Reese, F. Rincon, and M. Rieutord

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse et Tarbes, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue É. Belin, 31400 Toulouse, France
e-mail: daniel.reese@ast.obs-mip.fr

Received 29 March 2004 / Accepted 16 July 2004

Abstract. We carry out numerical and mathematical investigations of shear Alfvén waves inside of a spherical shell filled with an incompressible conducting fluid, and bathed in a strong dipolar magnetic field. We focus on axisymmetric toroidal and non-axisymmetric modes, in continuation of a previous work by Rincon & Rieutord (2003, A&A, 398, 663). Analytical expressions are obtained for toroidal eigenmodes and their corresponding frequencies at low diffusivities. These oscillations behave like magnetic shear layers, in which the magnetic poles play a key role, and hence become singular when diffusivities vanish. It is also demonstrated that non-axisymmetric modes are split into two categories, namely poloidal or toroidal types, following similar asymptotic behaviours as their axisymmetric counterparts when the diffusivities become arbitrarily small.

Key words. magnetohydrodynamics (MHD) – stars: oscillations – stars: magnetic fields

1. Introduction

Numerous astrophysical systems exhibit a pulsating behaviour that can be significantly influenced by the Lorentz force when a strong magnetic field is present. This may for instance be the case in neutron stars and magnetic white dwarfs (Lou 1995). Planetary cores, which are known to sustain a strong dynamo (Stevenson 1983), are also likely to fall into this category.

One of the most exciting examples of couplings between pulsation and magnetism is given by the seismological activity of roAp stars. This class of stars, discovered by Kurtz (1978), exhibits several kG (almost) dipolar magnetic fields and luminosity variations on periods ranging from 5 to 15 min. These oscillations seem to be well approximated by a single spherical harmonic $\ell = 1$ lined up with the magnetic axis, suggesting a strong mixing between high order p -modes and Alfvénic type oscillations.

Many different models have been developed to obtain a satisfying picture of the asteroseismology of these stars. Following theoretical work by Biront et al. (1982); Roberts & Soward (1983) and Campbell & Papaloizou (1986), Dziembowski & Goode (1996) have studied acoustic star models enveloped by a layer in which magnetic effects become dominant. Using a boundary layer approximation, they came up with an outer boundary condition which was then applied for the calculation of adiabatic acoustic modes. This model has

undergone a lot of refinements in order to take into account new physical processes. The latest version, proposed by Bigot & Dziembowski (2002), incorporates the centrifugal force (a non-axisymmetric effect, since the rotational and magnetic axis are often tilted in roAp stars) and suggests that the axis of the modes is not necessarily lined up with the magnetic axis. In spite of these improvements, there are still non-negligible discrepancies between the magnetically shifted eigenfrequencies computed from these models and the observed ones, showing that the precise coupling mechanism occurring in the surface layers is likely to be more complex. An important point is that a single ℓ value is sometimes assumed to be sufficient to describe the oscillations. This may not be the case, owing to the dipolar structure of the permanent magnetic field which induces a coupling between spherical harmonics thus producing a whole spectrum of ℓ 's (e.g. Rincon & Rieutord 2003).

Motivated by the observation that chemical peculiarities are observed near the magnetic poles of roAp stars, Balmforth et al. (2001) have tried to determine what precise physical phenomena were occurring in the polar and equatorial regions. Since the magnetic field is almost horizontal near the equator and vertical near the poles, convection is certainly inhibited in the latter region, allowing the diffusion of different chemical elements (an excess of helium is observed on the polar caps). Oscillations triggered by a κ -mechanism may therefore preferentially be observed in this region. This approach stresses the importance of a global description of the eigenmodes in such stars.

^{*} Appendices are only available in electronic form at <http://www.edpsciences.org>