

Chapitre 3

Approche linéaire de la supergranulation solaire

Hardy l'informait dans un billet laconique que la première démonstration de Petros avait été établie deux ans auparavant par un jeune mathématicien [...] Il y exprimait sa sympathie pour son jeune confrère en cette fâcheuse circonstance.

Apostolos Doxiadis, *Oncle Petros et la conjecture de Goldbach*, Seuil, p.110

3.1 Introduction

Comme il a été mentionné au chapitre 1, l'approche la plus simple de la supergranulation consiste à étudier l'instabilité convective dans le régime linéaire. En invoquant l'injection d'énergie par la voie de la recombinaison de l'hélium à 30 000 km de profondeur, Leighton (1963) avait suggéré qu'il était ainsi possible d'exciter un mode de longueur d'onde égale à la supergranulation. Nous avons déjà évoqué (chapitre 1.5.c) les gros problèmes que rencontrent cette théorie. Nous pensons également que le choix des conditions aux limites de type température fixée, qui est responsable de l'obtention d'échelles horizontales semblables à la profondeur de la couche fluide, n'est pas justifié dans ce problème (nous allons revenir sur ce point dans la suite).

Le seul moyen d'espérer pouvoir conserver un scénario linéaire (« simple ») est alors d'étudier la configuration d'une couche mince (d'épaisseur égale à la profondeur de recombinaison de l'hydrogène), sous les deux hypothèses suivantes :

- aux grandes échelles horizontales, le choix de conditions aux limites de type flux thermique fixé est plus réaliste que celui de conditions aux limites de type température fixée ;

- la granulation solaire agit comme un diffuseur turbulent de quantité de mouvement efficace qui rend la situation marginale pour les grandes échelles, du point de vue de l'instabilité convective.

Les premières études de la configuration avec flux fixé dans l'approximation de Boussinesq ont été effectuées par Sparrow et al. (1964), Hurle et al. (1966). Leurs travaux ont montré que l'instabilité linéaire se développait sur des échelles horizontales plus grandes lorsque les parois étaient de mauvais conducteurs thermiques (qui se rapprochent des conditions de flux fixé) que dans le cas de conducteurs parfaits (température fixée). Plus précisément, le vecteur d'onde horizontal critique dans le cas de parois parfaitement isolantes est zéro (mais le taux de croissance de ce mode reste toujours nul). D'autre part, le nombre de Rayleigh critique dans ce cas de figure passe de 657 à 120 pour des conditions aux limites stress-free sur la vitesse. Une étude pour les perturbations d'amplitude finie a ensuite été effectuée par van der Borgh (1974), Busse et Riahi (1980) et Chapman et Proctor (1980), toujours dans l'approximation de Boussinesq. Il semble que l'échelle horizontale la plus grande accessible au système soit toujours favorisée dans le régime faiblement non-linéaire. Une configuration en carrés semble privilégiée dans le cas de perturbations tridimensionnelles.

L'incorporation de la compressibilité au problème des conditions de flux fixé a été discuté par Depassier et Spiegel (1981) pour des polytropes. En utilisant un développement asymptotique justifié par l'existence de grandes échelles, ils ont conclu que de telles échelles persistaient dans le domaine faiblement non-linéaire et devaient bel et bien se manifester dans des systèmes astrophysiques tels que la photosphère solaire. Dans le problème avec température fixée, Gough et al. (1976) ont montré que la stratification augmentait le seuil de l'instabilité et qu'elle réduisait la longueur d'onde critique.

Murphy (1977) puis Edwards (1990) ont pour leur part étudié le cas Boussinesq linéaire avec champ magnétique. L'existence d'une transition vers des vecteurs d'onde critiques non nuls a ainsi été démontrée pour des champs magnétiques suffisamment forts. Un effet similaire a été identifié par Roberts (1985) pour la convection pénétrative en présence de conditions de flux fixé, la transition étant dans ce cas gouvernée par la profondeur de la zone convective.

L'existence de ces différents phénomènes, dont l'émergence naturelle de grandes échelles, nous semble intéressante à étudier dans le cas de la supergranulation, tout particulièrement l'influence simultanée de la stratification et du champ magnétique. Cependant, avant d'explorer les méandres de l'espace des paramètres, il convient de donner une justification à la démarche qui nous a conduit à une telle étude, et plus spécifiquement aux hypothèses que nous avons proposées ci-dessus.

3.2 Justification des hypothèses de l'étude

3.2.a Utilisation de diffusivités turbulentes

Dans le cadre général de l'étude de la turbulence, une des difficultés majeures est de trouver une modélisation adéquate de l'influence des petites échelles sur les grandes (entre autres, au-delà de l'échelle d'injection). Les granules sont avant tout responsables d'un transport turbulent très important comme en témoigne leur nombre de Reynolds gigantesque ($Re = 10^{10}$ à la surface). Ils transportent à la fois de l'énergie thermique (transport convectif) et de la quantité de mouvement (par l'intermédiaire du tenseur de Reynolds). La modélisation de ce transport est un épineux problème puisqu'il s'agit intrinsèquement d'un mécanisme non-linéaire. L'approximation la plus simple que l'on puisse effectuer consiste à l'assimiler à un phénomène de diffusion. Dans le cadre de la convection photosphérique, $Pr \ll 1$, ce qui signifie que le principal frein à la convection est la diffusion thermique. Il est clair que c'est le refroidissement radiatif qui fixe en première approximation les coefficients turbulents vus par les grandes structures, en imposant la taille caractéristique des panaches convectifs à petite échelle. À la surface, nous avons vu au chapitre 1 que $\kappa = 2 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} = L_g V_g$. À grande échelle, les coefficients de transport turbulents sont alors donnés en première approximation par $\nu_T = \eta_T = L_g V_g = \kappa = \kappa_T$. On a alors $Pr_T = \mathcal{O}(1)$. De fait, la viscosité turbulente ainsi définie est beaucoup plus grande que la viscosité (qui vaut $\nu \sim 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$), et le nombre de Rayleigh effectif pour les grandes échelles horizontales est alors bien plus petit que le nombre de Rayleigh qui serait calculé à partir des propriétés matérielles du système. Cet argument justifie qualitativement l'approche linéaire de l'instabilité pour des échelles très grandes devant les échelles contenant l'essentiel de l'énergie. Malgré tout, il faut bien sûr garder à l'esprit qu'il s'agit là d'une théorie « d'ordre zéro » qui ne prend aucunement en compte la complexité de l'écoulement turbulent associé aux granules et la forme précise du tenseur de Reynolds généré par l'écoulement turbulent. Cette remarque sera en particulier pleinement justifiée par les résultats numériques présentés au chapitre 4.

3.2.b Conditions aux limites sur la température

La turbulence présente dans la zone convective impose un profil thermodynamique isentropique en profondeur et ce n'est qu'en surface, où le refroidissement a lieu, que l'on rencontre de forts gradients d'entropie. Le bilan énergétique total est le suivant : au bas de la zone convective, la luminosité solaire est imposée. Puisque le régime est stationnaire, le flux doit être le même à la surface, où c'est le transfert radiatif qui assure alors le transport de l'énergie. L'interface entre la convection et la radiation est assurée par la granulation (chapitre 1.5.a). Les échelles plus grandes « voient » donc un milieu présentant des variations ho-

horizontales de température qui ne peuvent pas être annulées faute d'une diffusivité thermique suffisante. Il semble alors logique de considérer des conditions aux limites de type flux fixé pour étudier la stabilité des grandes échelles horizontales, puisque ces conditions correspondent au cas idéal de parois qui ne peuvent pas diffuser instantanément les fluctuations de température.

3.3 Détails du modèle linéaire

3.3.a Linéarisation pour un fluide complètement compressible

Le modèle repose sur la description MHD complètement compressible des mouvements fluides effectuée au chapitre 2, sous une forme linéarisée que nous explicitons ici.

Note importante

Dans ce chapitre, et dans ce chapitre seulement, z désignera la profondeur et non l'altitude, si bien que dans l'ensemble des équations exposées au chapitre précédent (en particulier dans les profils hydrostatiques (2.8) on doit procéder au changement de variable $z \rightarrow 1 - z$. Dans ce chapitre, la gravité et le champ magnétique permanents sont orientés respectivement suivant $+e_z$ et $-e_z$ si bien que dans l'équation de la vitesse on doit utiliser $+\Lambda e_z$ du terme de gravité. Ce changement temporaire de convention trouve son origine dans plusieurs études linéaires utilisant la variable de profondeur.

Avant toute chose, précisons les paramètres de cette étude linéaire. Nous nous plaçons dans le cas d'un polytrophe d'indice $m = 1$ (cf. chapitre 2.4.a) confiné entre deux plaques thermiquement *isolantes* situées entre $z = 0$ (haut) et $z = 1$ (bas). Un champ magnétique vertical $\mathbf{B} = -e_z$ est présent (des variables sans dimension sont toujours utilisées). Pour le reste, les notations sont les mêmes qu'au chapitre 2.

Comme il est de rigueur dans ce type d'analyse, nous considérons des perturbations infinitésimales bidimensionnelles de l'état hydrostatique du polytrophe, donné dans l'équation (2.8), avec les dépendances en t et x suivantes :

$$\begin{aligned}
 v_x &= U(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 v_z &= W(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 T &= T_s(z) + \theta(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 \rho &= \rho_s(z) + \rho(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 p &= p_s(z) + p(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 B_z &= -1 + b_z(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 B_x &= b_x(z) e^{\lambda t} e^{i a x}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le système d'équations linéaires associé s'écrit ($D = \partial/\partial z$) :

$$\begin{aligned}
 \lambda \rho &= -WD \rho_s - \rho_s (ia U + DW), \\
 \lambda \rho_s U &= \frac{Q \text{Pr}^2}{ia \text{Pr}_m} D^2 b_z + Q \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pr}_m} ia b_z + \frac{1}{3} \text{Pr} ia DW \\
 &\quad + \text{Pr} \left(D^2 U - \frac{4}{3} a^2 U \right) \\
 &\quad - \frac{1}{C_k^2} (\rho_s ia \theta + T_s ia \rho), \\
 \lambda \rho_s W &= \frac{ia}{3} \text{Pr} D U + \frac{4}{3} \text{Pr} D^2 W - \text{Pr} a^2 W \\
 &\quad - \frac{1}{C_k^2} (\rho_s D \theta + \theta D \rho_s + T_s D \rho) \\
 &\quad + \left(\Lambda - \frac{1}{C_k^2} D T_s \right) \rho, \\
 \frac{\lambda \rho_s}{\gamma} \theta &= (D^2 - a^2) \theta - \frac{\rho_s}{\gamma} W \\
 &\quad - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_s T_s (ia U + DW), \\
 \lambda b_z &= \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_m} (D^2 - a^2) b_z + ia U,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

tandis que la pression et le champ magnétique horizontal sont donnés par

$$\frac{p}{p_s} = \frac{\rho}{\rho_s} + \frac{\theta}{T_s}, \tag{3.3}$$

$$0 = D b_z + iab_x. \tag{3.4}$$

Finalement, les conditions aux limites suivantes sur les perturbations sont imposées :

$$W = D U = D \theta = 0 \tag{3.5}$$

sur les deux parois ($z = 0$ and $z = 1$), afin d'obtenir un problème aux valeurs propres complet. Ces conditions expriment l'absence de contrainte tangentielle pour la vitesse aux parois et un flux thermique fixé.

Remarque

On suppose que le champ magnétique est vertical au niveau des parois, ce qui implique

$$D b_z = 0. \quad (3.6)$$

Dans le cas où la bifurcation vers la convection se produit pour $\lambda = 0$, cette dernière condition ne joue aucun rôle dans la détermination du mode propre. En effet, l'équation différentielle sur z est alors du sixième ordre et les conditions aux limites sur la vitesse et la température suffisent à bien poser le problème. En revanche si on considère le problème de l'overstabilité magnétique pour laquelle la convection se met en place par une bifurcation de Hopf ($\lambda = \pm i\omega$), l'ordre de l'équation est huit, et les conditions aux limites sur le champ magnétique deviennent cruciales pour le calcul du mode propre, un aspect négligé par Chandrasekhar (1961) dans son analyse de l'instabilité de magnétoconvection dans l'approximation de Boussinesq (les valeurs des seuils d'overstabilité données dans le livre ne sont valables que dans le cas où le champ magnétique vertical s'annule aux bords).

3.3.b Forme anélastique

Il est également possible d'utiliser la version anélastique des équations linéarisées, comme dans le travail de Gough et al. (1976). L'approximation anélastique consiste à négliger les ondes sonores en imposant $\partial_t \rho = 0 = -\nabla \cdot (\rho v)$, mais ne supprime pas pour autant les effets de la stratification de densité sur la convection. Elle permet donc de se débarrasser de l'équation d'évolution pour la densité et d'exprimer le problème complet pour les trois variables (θ, W, b_z) uniquement. Nous donnons simplement ici le résultat des calculs. Pour les obtenir on utilise les relations suivantes pour les perturbations, basées sur la définition du profil polytropique d'index m :

$$\begin{aligned} D \rho_s &= \frac{m}{z + z_0} \rho_s, \\ \nabla \cdot v &= -\frac{m W}{(z + z_0)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 -\rho_s \lambda \left\{ \begin{array}{l} (D^2 - a^2) W \\ + \frac{(m-1)}{(z+z_0)} D W \\ - \frac{2m}{(z+z_0)^2} W \end{array} \right\} &= -\frac{(m+1)}{(z+z_0)} Q \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pr}_m} (D^2 - a^2) b_z \\
 &+ Q \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pr}_m} D (D^2 - a^2) b_z \\
 &- \frac{a^2 \Lambda \rho_s}{(z+z_0)} \theta - \text{Pr} (D^2 - a^2)^2 W \\
 &+ \frac{2m(m+4)}{(z+z_0)^4} \text{Pr} W - \frac{2m(m+4)}{(z+z_0)^3} \text{Pr} D W \\
 &+ \frac{m(m+4)}{(z+z_0)^2} \text{Pr} D^2 W - \frac{1}{3} \frac{a^2 m (4m+7)}{(z+z_0)^2} \text{Pr} W \\
 &+ \text{Pr} \frac{D (D^2 - a^2)}{(z+z_0)} W, \\
 \frac{\rho_s \lambda}{\gamma} \theta &= -\frac{(1+m-\gamma m)}{\gamma} \rho_s W + (D^2 - a^2) \theta, \\
 \lambda b_z &= -\frac{m}{(z+z_0)} W - D W \\
 &+ \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_m} (D^2 - a^2) b_z.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Résoudre le problème anélastique en marge du problème complet permet notamment de vérifier la validité des solutions obtenues, ce qui est toujours intéressant.

3.3.c Équation cubique dans l'approximation de Boussinesq

Finalement, dans la limite de l'approximation de Boussinesq, que nous étudierons plus tard, les équations que l'on doit résoudre pour calculer les seuils de stabilité marginale se mettent sous la forme suivante :

$$(D^2 - a^2)^3 W + a^2 R W - Q D^2 (D^2 - a^2) W = 0 \tag{3.9}$$

et

$$(D^2 - a^2) \theta = -\text{Pr} W. \tag{3.10}$$

3.4 Résultats

3.4.a Méthode numérique

Nous avons calculé les modes propres du système dans le cas de mouvements stationnaires en utilisant LSB, le code de résolution de problèmes linéaires développé par Lorenzo Valdettaro et Michel Rieutord. La projection de l'équation différentielle est effectuée sur une grille de Gauss-Lobatto construite à partir des polynômes de Chebyshev. L'avantage principal de cette méthode de collocation est sa convergence spectrale. Deux algorithmes ont été utilisés : une méthode QZ (voir par exemple Chatelin (1993)) qui permet de déterminer le spectre complet des valeurs propres, et une méthode itérative (Arnoldi-Chebyshev) qui calcule seulement quelques modes propres autour d'une valeur propre choisie. Soulignons que la résolution des équations présentées ci-dessus requiert l'utilisation d'arithmétiques 64 bits (disponibles sur Compaq-Alpha et SGI Origin) et de quadruple précision¹, afin d'obtenir une bonne convergence des solutions lorsque le vecteur d'onde horizontal a tend vers 0. Ceci permet d'éviter l'utilisation de développements en série comme ceux employés par Gough et al. (1976) dans une étude similaire.

On peut procéder de deux façons distinctes : dans le premier cas, la valeur propre est directement λ , et on fait varier le nombre de Rayleigh R jusqu'à ce que la partie réelle de λ devienne positive. Cette méthode présente l'avantage de donner à la fois les seuils d'overstabilité et de convection stationnaire. Dans la deuxième approche, on fixe λ à zéro et on résout alors le problème aux valeurs propres directement pour R . Cette dernière méthode permet d'obtenir immédiatement la courbe de stabilité marginale $R(a)$ de manière très précise mais n'est pas utilisable dans le cas de la convection oscillante.

Le code a été validé sur des configurations utilisant des conditions aux limites différentes étudiées auparavant (Gough et al. 1976, Weiss et al. 1990).

3.4.b Diverses configurations

L'ensemble des résultats pour $m = 1$ est résumé dans le tableau 3.1.

Effet du degré de compressibilité

En premier lieu, on peut s'intéresser au comportement de l'instabilité lorsqu'on passe d'un milieu quasi-incompressible ($z_0 \rightarrow +\infty$) à un milieu fortement stratifié (petits z_0), en absence de champ magnétique. Le nombre de Rayleigh critique est relativement peu sensible à ce changement de configuration, même si la stratification défavorise la naissance de la convection (partie gauche de la fi-

¹Merci à Arnaud Antkowiak et Lorenzo Valdettaro pour leur aide à ce sujet !

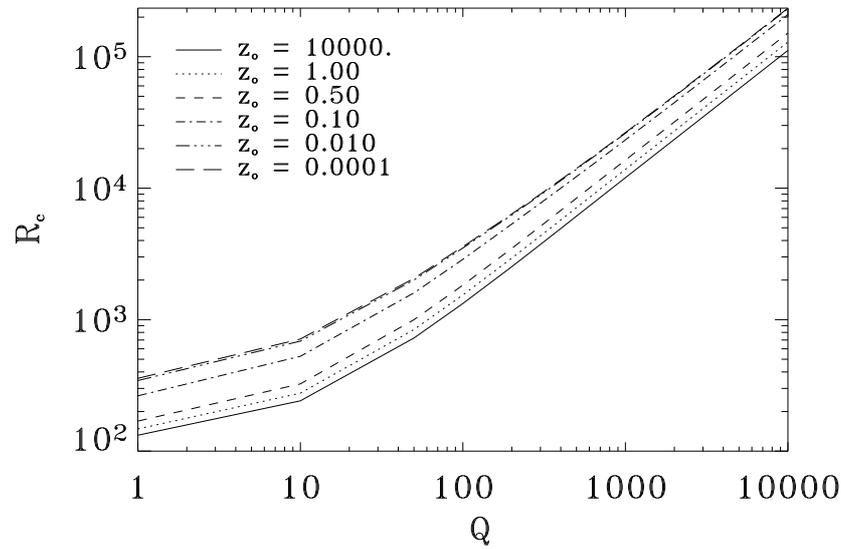


FIG. 3.1 – Variation du nombre de Rayleigh critique R_c pour différents z_0 lorsqu'on augmente le champ magnétique. Le comportement dans la partie droite de la figure correspond à la limite $R_c \rightarrow 12Q$ (voir paragraphe 3.5).

gure 3.1). Le vecteur d'onde critique est toujours $a = 0$ quelque soit le degré de stratification du milieu (figure 3.2).

Influence du champ magnétique

En se limitant à l'influence du champ magnétique vertical sur une configuration de type Boussinesq, on retrouve le comportement qualitatif décrit par Murphy (1977) et les résultats de Edwards (1990). La figure 3.1 met en évidence une grande augmentation du nombre de Rayleigh critique, comme dans le cas des conditions aux limites plus habituelles. Cependant la situation est légèrement différente dans la mesure où le vecteur d'onde critique reste nul pour $Q < 394.4$ puis devient non-nul pour des intensités magnétiques supérieures (figure 3.2). La transition est bien illustrée sur le réseau de courbes de stabilité marginale de la figure 3.3. Lors de la transition, la courbure change de signe, une propriété que nous utiliserons au paragraphe 3.5 pour calculer le seuil de transition analytiquement.

Régime mixte

Dans la photosphère solaire, la stratification et le champ magnétique sont deux acteurs majeurs de la dynamique. Le régime mixte est donc le plus intéressant à étudier. On voit sur la figure 3.2 que la valeur seuil du nombre de Chandrasekhar pour que la transition mentionnée précédemment se produise diminue en même

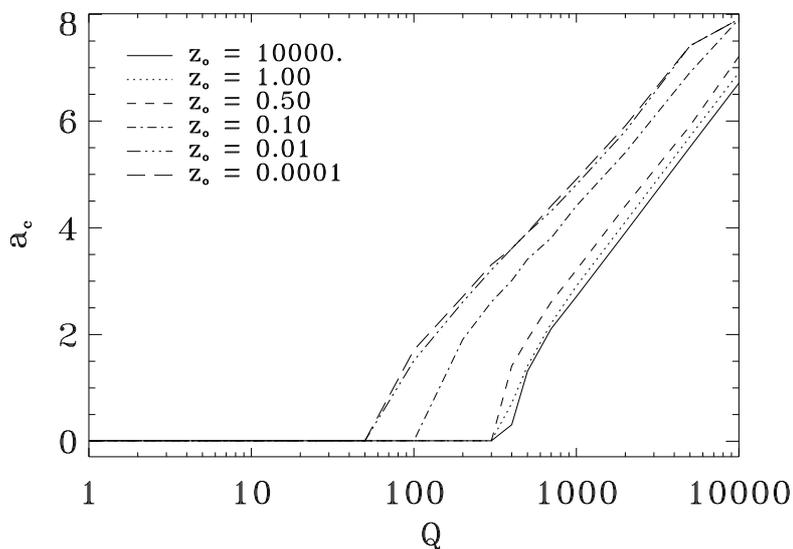


FIG. 3.2 – Influence de Q sur le vecteur d'onde horizontal critique a_c , à z_0 fixé. Pour des valeurs suffisamment élevées, a_c bifurque vers des valeurs non-nulles. La valeur précise du seuil dépend du degré de stratification de la couche.

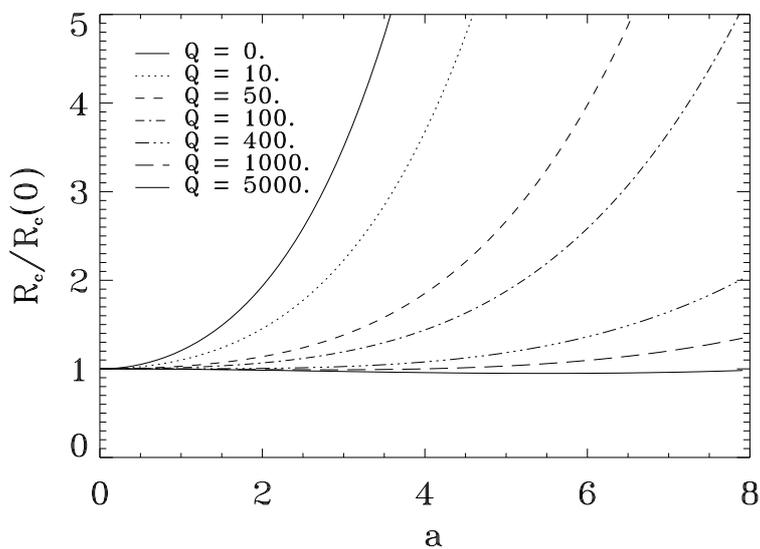


FIG. 3.3 – Courbes de stabilité marginale pour différents Q , dans l'approximation de Boussinesq. Celles-ci sont normalisées à $R_c(a = 0, Q)$ pour souligner la transition vers $a_c \neq 0$. La courbe supérieure correspond à $Q = 0$.

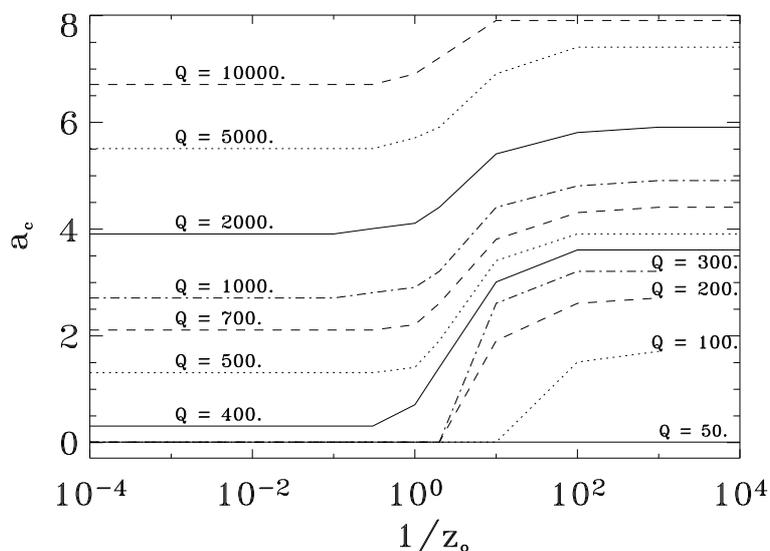


FIG. 3.4 – Influence du degré de compressibilité sur le vecteur d’onde horizontal à Q fixé.

temps que l’on augmente la stratification de densité au travers de la couche, jusqu’à atteindre une valeur limite de 61 dans le cas infiniment compressible. Cette valeur a été obtenue numériquement et est atteinte relativement rapidement lorsqu’on diminue z_0 , en raison de la forme asymptotique des équations vis-à-vis de ce paramètre². Si Q est supérieur à la valeur seuil, les comportements du vecteur d’onde et du nombre de Rayleigh critiques sont alors qualitativement les mêmes que dans le cas de conditions aux limites de type température fixée (figure 3.4 et 3.5). Lorsque Q est inférieur à 61 il est impossible dans tous les cas de générer *dans le régime linéaire* une instabilité avec $a_c \neq 0$. Bien sûr, la situation pourrait être différente dans le domaine non-linéaire. Finalement, remarquons que la compressibilité et le champ magnétique agissent toujours de concert pour inhiber la convection, le champ magnétique étant cependant plus efficace pour cela. Dans le cas où la rotation et le champ sont combinés, il est au contraire possible de faciliter la naissance de la convection dans certains régimes où la force de Coriolis contrebalance la force de Lorentz (Chandrasekhar 1961).

²Le développement anélastique des équations linéarisées pour les polytropes fait apparaître des termes en $(z + z_0)^{-n}$, avec $1 \leq n \leq 4$.

Q	$1/z_0$							
	0	0.33	1.	2.	10.	100.	1000.	10000.
0	120.	121.9	133.2	151.8	232.8	303.	313.7	314.8
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
1	132.1	134.4	147.5	169.2	263.3	344.1	356.4	357.7
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
10	241.3	246.4	276.	324.6	526.6	686.9	710.1	712.5
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
50	724.8	742.2	840.7	999.	1597.9	2001.4	2054.6	2060.1
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
60	845.4	865.9	981.1	1165.9	1856.5	2312.5	2371.8	2377.9
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
70	966.	989.4	1121.4	1332.4	2113.4	2620.2	2683.9	2690.4
	0.	0.	0.	0.	0.	0.6	0.8	0.8
80	1086.5	1112.9	1261.6	1498.6	2369.1	2921.2	2988.	2994.8
	0.	0.	0.	0.	0.	1.	1.2	1.2
100	1327.4	1359.7	1541.6	1830.5	2877.9	3506.	3578.8	3586.2
	0.	0.	0.	0.	0.	1.5	1.7	1.7
300	3732.	3823.2	4333.2	5132.7	7691.6	8869.8	8997.7	9010.5
	0.	0.	0.	0.	2.6	3.2	3.2	3.3
400	4933.1	5053.7	5726.5	6771.8	9990.3	11420.3	11573.5	11588.9
	0.3	0.3	0.7	1.4	3.	3.6	3.6	3.6
500	6129.1	6278.7	7111.	8394.1	12254.7	13929.7	14108.1	14126.
	1.3	1.3	1.4	1.9	3.4	3.9	3.9	3.9
1000	12011.	12303.2	13917.1	16354.8	23296.9	26145.9	26446.	26475.9
	2.7	2.8	2.9	3.2	4.4	4.8	4.9	4.9
10000	111725.8	114459.5	129417.3	151427.2	209267.7	231172.7	233442.6	233670.
	6.7	6.7	6.9	7.2	8.2	8.7	8.7	8.7

TAB. 3.1 – Nombres de Rayleigh et vecteurs d'onde critiques pour des conditions aux limites de type flux fixé dans une couche polytropicque d'indice $m = 1$, en fonction de l'intensité du champ magnétique, donnée par Q , et du degré de compressibilité, défini par l'intermédiaire du paramètre $1/z_0$.

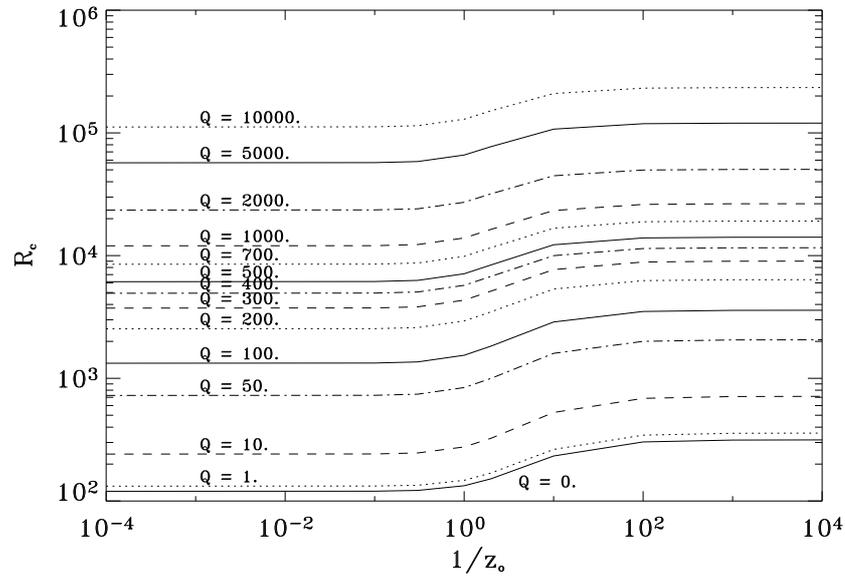


FIG. 3.5 – Influence de z_0 sur le nombre de Rayleigh critique à Q fixé.

3.5 Développements analytiques dans l'approximation de Boussinesq

Nous présentons dans cette section des développements analytiques dans le cas Boussinesq, permettant de démontrer rigoureusement l'occurrence de la transition décrite précédemment. Ce travail a été effectué par Edwards (1990), et est publié dans la revue *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. Malheureusement, cette publication n'a jamais été citée et n'est référencée dans aucune base de données bibliographique à l'heure actuelle. Un referee de la revue *Physics of Fluids* nous a signalé l'existence de ces résultats, que nous avons redémontrés intégralement de manière indépendante. Nous nous permettons donc de les reproduire ici, la méthode de dérivation utilisée étant toutefois légèrement différente. Murphy (1977) s'était également intéressé à cette transition, mais les résultats quantitatifs contenus dans l'acte de conférence sont faux. La procédure utilisée s'inspire à la fois de Chandrasekhar (1961) et de Hurlé et al. (1966).

3.5.a Résolution de l'équation cubique

Nous partons des équations (3.9)-(3.10) pour résoudre le problème. Pour des raisons de symétrie spécifiques au cas Boussinesq et au jeu de conditions aux limites utilisé, il est possible de se restreindre aux solutions paires par rapport au milieu de la couche, qui sont toujours les premières instables :

$$W = \sum_{i=1}^3 A_i \cosh \left(q_i \left(z - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (3.11)$$

où les q_i sont solutions de l'équation caractéristique associée à l'équation (3.9). En posant $Z_i = q_i^2 - a^2$, on obtient l'équation cubique (Chandrasekhar 1961)

$$Z^3 - QZ^2 - Qa^2Z + a^2R = 0. \quad (3.12)$$

Les racines de celle-ci s'écrivent (Abramowitz et Stegun 1954)

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Q}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{Q^2 + 3Qa^2} \cos \left(\frac{\nu}{3} \right), \\ Z_2 &= \frac{Q}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{Q^2 + 3Qa^2} \cos \left(\frac{\nu + 2\pi}{3} \right), \\ Z_3 &= \frac{Q}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{Q^2 + 3Qa^2} \cos \left(\frac{\nu - 2\pi}{3} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

avec

$$\nu = \arccos \left(\frac{-2Q^3 - 9Q^2a^2 + 27a^2R}{2Q^3(1 + 3a^2/Q)^{3/2}} \right). \quad (3.14)$$

On insère alors les racines dans le déterminant D du système en utilisant les conditions aux limites, afin d'obtenir la solution complète. Il n'y aura des solutions non-triviales que si

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 \\ \left(q_1 Z_1^2 - Q q_1^3 \right) \\ \quad \times \tanh \left(\frac{q_1}{2} \right) & \left(q_2 Z_2^2 - Q q_2^3 \right) \\ \quad \times \tanh \left(\frac{q_2}{2} \right) & \left(q_3 Z_3^2 - Q q_3^3 \right) \\ \quad \times \tanh \left(\frac{q_3}{2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.15)$$

Puisque l'on cherche à déterminer le comportement autour de $a = 0$, on peut essayer de développer D en série de puissances de a (on suppose que le rayon de convergence de cette série est non-nul) en utilisant les expressions (3.13)-(3.14) :

$$D = f_1(R, Q) a^3 + f_2(R, Q) a^5 + \mathcal{O}(a^7). \quad (3.16)$$

Le premier terme non nul est $\mathcal{O}(a^3)$. Si on résout l'équation (3.15) à cet ordre, on trouve alors le comportement de $R_c(a = 0, Q)$. L'ordre suivant est $\mathcal{O}(a^5)$ et permet de calculer la courbure de la courbe de stabilité marginale. Lorsque la convexité change, la bifurcation vers $a_c \neq 0$ est observée.

3.5.b Dépendance de R_c vis-à-vis de Q pour $a = 0$

Le premier terme obtenu à partir des équations (3.13)-(3.14) donne

$$f_1(R, Q) = \frac{2R^{3/2}}{Q} \tanh\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right) - \frac{R^{3/2}}{\sqrt{Q}} - \sqrt{R}Q^{3/2} + \frac{R^{3/2}\sqrt{Q}}{12}. \quad (3.17)$$

D obéit à l'équation (3.15) à la stabilité marginale. Pour tout a petit, on doit donc avoir $f_1 = 0$. Le nombre de Rayleigh critique approche alors

$$R_c(a = 0, Q) = \frac{12 Q^{5/2}}{Q^{3/2} + 24 \tanh\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right) - 12\sqrt{Q}} \quad (3.18)$$

lorsque a tend vers 0. Dans la limite $Q \rightarrow +\infty$ (figure 3.1), on montre que $R_c(0, Q)$ tend vers $12Q$ de manière similaire à la loi $\pi^2 Q$ obtenue par Chandrasekhar (1961) dans le cas de conditions aux limites de type température fixée. Si $Q \rightarrow 0$, on retrouve la valeur $R_c(a = 0) = 120$ de Hurle et al. (1966). Le résultat (3.18) est en parfait accord avec les solutions numériques. On peut alors calculer la pente de la fonction $R(a)$:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial a} \right|_D = - \left. \frac{\partial R}{\partial D} \right|_a \left. \frac{\partial D}{\partial a} \right|_R = -3 \frac{f_1}{a f_1'} - \frac{5f_2 - \frac{3f_1 f_2'}{f_1'}}{f_1'} a + \mathcal{O}(a^3), \quad (3.19)$$

où les $'$ correspondent à des dérivées par rapport à la variable R , et

$$\Phi(Q) = Q^{3/2} + 24 \tanh\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right) - 12\sqrt{Q}, \quad (3.20)$$

$$f_1' = \frac{Q^{1/4}}{\sqrt{12}} \Phi^{1/2}. \quad (3.21)$$

Pour $a \rightarrow 0$, $f_1/a \rightarrow f_1' \left. \frac{\partial R}{\partial a} \right|_D$. En utilisant l'équation (3.19), on peut vérifier que la pente est nulle pour $a = 0$. Ceci était attendu puisque la courbe de stabilité marginale est une fonction paire de a en raison de la symétrie du problème physique.

3.5.c Transition vers une longueur d'onde finie

Un calcul assez laborieux, effectué partiellement grâce au logiciel de calcul formel Maxima, permet alors d'accéder à la fonction $f_2(R, Q)$:

$$f_2 = \frac{\Phi^{1/2}}{\sqrt{12} Q^{21/4}} \left\{ \begin{array}{l} -1080 \frac{Q^8}{\Phi^3} - \frac{57}{2} \frac{Q^7}{\Phi} + 450 \frac{Q^{15/2}}{\Phi^2} + 27 \frac{Q^{17/2}}{\Phi^2} - 54 \frac{Q^9}{\Phi^3} \\ + \frac{9}{8} \frac{Q^8}{\Phi} - \frac{144}{5} \frac{Q^{10}}{\Phi^3} - \frac{12}{5} \frac{Q^{19/2}}{\Phi^2} + \frac{51}{35} \frac{Q^{11}}{\Phi^3} - \frac{Q^{13/2}}{8} \\ + 576 \frac{Q^{15/2} \exp \sqrt{Q}}{\Phi^2 (1 + \exp \sqrt{Q})^2} - 3456 \frac{Q^8 \exp \sqrt{Q}}{\Phi^3 (1 + \exp \sqrt{Q})^2} \\ + 3 \frac{Q^{13/2} \tanh \left(\frac{\sqrt{Q}}{2} \right)}{\Phi} - 216 \frac{Q^7 \tanh \left(\frac{\sqrt{Q}}{2} \right)}{\Phi^2} \\ + 3888 \frac{Q^{15/2} \tanh \left(\frac{\sqrt{Q}}{2} \right)}{\Phi^3} \end{array} \right\}. \quad (3.22)$$

On peut alors déterminer directement la valeur de Q pour laquelle la transition vers les longueurs d'onde finies se produit. La courbure de $R(a)$ est donnée par

$$\left. \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \right|_{D=0} = -2 \frac{f_2(R_c(0, Q))}{f_1'(R_c(0, Q))} \quad (3.23)$$

en $a = 0$. On peut vérifier sur la figure 3.6 que f_1' est toujours positive, si bien que tout dépend directement du signe de f_2 . Pour $Q < 394.4$, $f_2 < 0$ et $R_c(0, Q)$ est le minimum absolu. Pour des valeurs de Q supérieures, f_2 est toujours positive et $R_c(0, Q)$ est un maximum local. Murphy (1977) avait donné une valeur erronée $Q \sim 10^{2.2}$ pour la transition, tandis que Edwards (1990) avait obtenu le résultat exact en utilisant une méthode légèrement différente basée sur les conditions de solvabilité d'un développement du nombre de Rayleigh en puissances de a .

3.6 Discussion

Les résultats établis aux paragraphes précédents ont des implications intéressantes du point de vue de la génération de structures convectives de grande taille dans la photosphère solaire. En dépit de la simplicité du modèle, cette étude livre des informations importantes sur le comportement de l'instabilité dans les conditions particulières de flux fixé.

Dans une zone extrêmement stratifiée comme le haut de la zone convective solaire, où la turbulence aux échelles correspondant à la granulation augmente

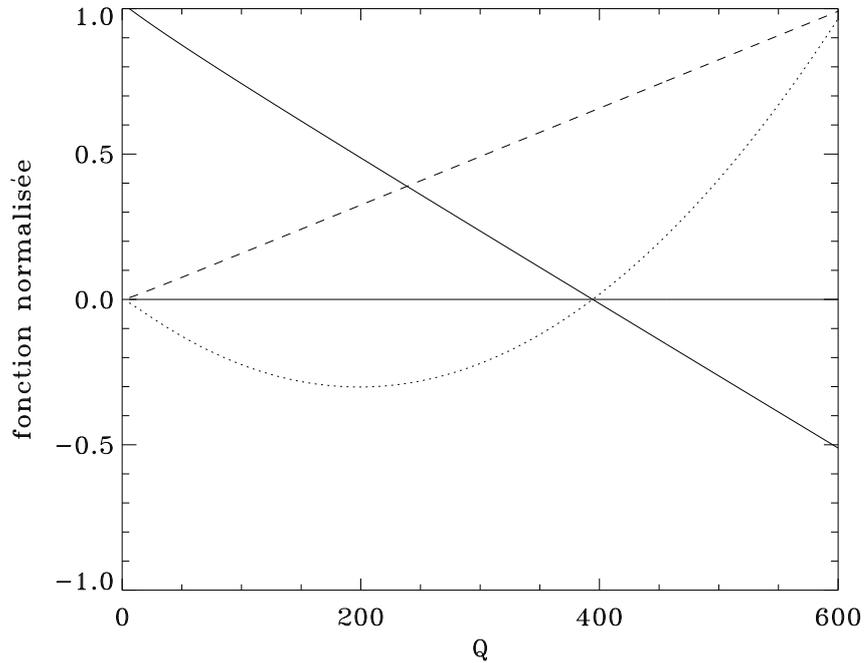


FIG. 3.6 – Variation de $f(Q) = \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \Big|_D$ (trait plein), f_1' (tirets) and f_2 (pointillés) pour $a = 0$. Les fonctions ont été normalisées.

considérablement les propriétés de transport du fluide, on peut imaginer un scénario pour lequel des longueurs d'onde très grandes par rapport à la granulation peuvent être déstabilisées par un mécanisme linéaire³. La taille de la longueur d'onde déstabilisée serait alors contrôlée par l'intensité moyenne du champ magnétique qui traverse la couche. En effet, nous avons montré qu'une transition vers les longueurs d'onde finies était réalisable pour peu que le champ magnétique soit suffisamment fort, et que cette transition était favorisée lorsque la stratification devenait extrêmement importante. Dans ce cas, le nombre de Chandrasekhar critique est 61.

On peut estimer le champ magnétique minimal nécessaire à l'occurrence de cet effet dans la photosphère solaire. Considérons les diffusivités renormalisées calculées au paragraphe 3.2.a, une densité $\rho_d = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$ pour une profondeur $d \simeq 5 \text{ 000 km}$ ($z_o \simeq 0.01$). La longueur d'onde de la supergranulation sera l'échelle instable si $Q \simeq 100$, ce qui correspond à un champ de l'ordre de 100 G à 1 kG. Cette valeur, est élevée, mais reste compatible avec les intensités observées au niveau du réseau magnétique solaire.

³On peut là encore faire un parallèle avec les modèles de dynamo. Le modèle (linéaire) de dynamo cinématique permet par exemple d'expliquer certaines des observations sur l'activité magnétique solaire *aux grandes échelles*, alors que la turbulence sous-jacente est par définition fortement non-linéaire. Ceci suggère que les mécanismes agissant aux grandes échelles peuvent être seulement faiblement non-linéaires.

Bien entendu, beaucoup de paramètres sont mal contrôlés dans ce modèle empirique. Par exemple, certains auteurs (Vainshtein et al. 1991, Cattaneo et Vainshtein 1991, Cattaneo 1994) ont suggéré que la diffusivité magnétique turbulente pouvait être très inférieure à la valeur approximative obtenue par la « recette » de l'analyse dimensionnelle, lorsqu'un champ magnétique même faible était présent dans le fluide. La distribution du champ magnétique de surface montre aussi que le facteur de remplissage est plutôt faible et que l'interaction entre la dynamique et le champ magnétique est loin d'être négligeable, si bien que l'hypothèse d'un champ vertical et constant au travers de la couche est plutôt simpliste. Cependant, les valeurs estimées donnent un ordre de grandeur satisfaisant.

Nous concluons donc qu'un tel mécanisme d'instabilité linéaire reste crédible pour expliquer la supergranulation comme phénomène de surface (sans avoir à évoquer la recombinaison de l'hélium en profondeur). La supergranulation pourrait alors être vue comme la première grande échelle linéairement instable convectivement lorsque des champs magnétiques similaires à ceux du réseau photosphérique sont présents. Cette étude ne permet pas pour autant de résoudre le problème de la nature convective ou non de la supergranulation, puisque la modélisation du transport turbulent aux échelles plus petites que la supergranulation y est réduite à sa plus simple expression (une diffusion turbulente), ce qui exclut *de facto* des mécanismes d'instabilité liés à la turbulence à petite échelle. Pour aller plus loin, une simulation numérique de turbulence comme celle présentée au chapitre 4 est nécessaire.



Magnetically driven transition of marginal compressible convection with a prescribed heat flux

F. Rincon* and M. Rieutord

*Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse, Observatoire Midi-Pyrénées,
14 avenue Édouard Belin, 31400 TOULOUSE, FRANCE*

(Dated: October 26, 2004)

We present an investigation of the onset of steady Rayleigh-Bénard magnetoconvection in a polytropic fluid layer when a fixed heat flux is prescribed at the boundaries. In a non-magnetic Boussinesq context, such a configuration is known to favor a “mode” with zero horizontal wave number. We show that the situation can be somewhat different when stratification and magnetic field combine, giving birth to a finite horizontal marginal scale in most cases. We demonstrate analytically that the transition to a non-zero wave number occurs for a Chandrasekhar number $Q = 394.3$ in the Boussinesq limit, while stratification tends to reduce this critical value.

PACS numbers: 47.27.Te, 96.60.Mz

Since the pioneering work of Rayleigh¹, natural convection and the Rayleigh-Bénard problem have been extensively studied, mainly in the framework of the Boussinesq approximation. Also, the almost-exclusive choice of perfectly thermally conducting boundaries has been made, since the top and bottom plates are usually held at fixed temperature in laboratory experiments. However, for some highly stratified convective layers such as stellar atmospheres, including compressible effects becomes necessary^{2,3}. Depassier and Spiegel⁴ initiated a discussion about the right choice of temperature boundary conditions in astrophysical convection. Nordlund⁵ suggested to use thermally insulating boundaries (hereafter called “fixed flux boundaries”) in numerical simulations of flows at scales larger than granulation at the Sun’s surface, since small-scale granular flows are known to transport most of the *prescribed* solar energy flux.

Linear stability results with fixed flux boundaries have first been obtained by Sparrow et al.⁶ and Hurle et al.⁷; these authors showed that the convective instability developed on large horizontal scales since such boundary conditions yield a critical wave number $a_c = 0$.

Depassier and Spiegel⁴ used this property to investigate the weakly non-linear problem for a *compressible* fluid, focusing on the limit of small wave numbers a . They concluded that this type of large-scale convection was very likely at work in stellar atmospheres, although the very special case $a = 0$ made little sense physically. In the same spirit, Murphy⁸ tackled the problem of mixing fixed flux boundaries with a constant *magnetic field* permeating a Boussinesq layer. A sufficiently strong magnetic field was able to create a transition to non-zero critical wave number. Roberts⁹, using such boundaries in non-magnetic penetrative convection, found a similar transition depending on the depth of the layer.

In this Brief Communication we address the problem of the onset of convection in a *compressible magnetized fluid with fixed flux boundaries*, a configuration that has not yet been studied in detail in spite of its relevance to astrophysical systems; we show that the marginal stability curve undergoes a transition from zero to finite wave

number when the magnetic field exceeds a critical value and perform a mathematical analysis of the Boussinesq limit.

The model relies on a fully compressible description of the fluid motions in a constant gravity field $\vec{g} = g \vec{e}_z$. We assume a perfect gas equation of state and impose constant specific heat c_p , dynamical viscosity μ , electrical (σ) and thermal (χ) conductivities. The static background is a polytrope confined between two thermally insulating plates at $z = 0$ (top, temperature T_o) and $z = d$ (bottom, temperature $T_1 > T_o$). A uniform vertical magnetic field $\vec{B} = -B_o \vec{e}_z$ is imposed. The non-dimensional equations for compressible magnetoconvection are obtained by taking d as the unit of length (from now on, $0 < z < 1$), ρ_d , the bottom density, as the unit of density, ΔT , the temperature difference between the two plates, as the unit of temperature, the thermal time scale $(\rho_d c_p d^2)/\chi$ as the unit of time, and B_o as the unit of magnetic field. The resistivity is $\eta = 1/(\sigma \mu_o)$ and the thermal diffusivity is $\kappa = \chi/(\rho_d c_p)$. $Q = (B_o^2 d^2)/(\mu_o \mu \eta)$ is the Chandrasekhar number, $Pr = \mu/(\rho_d \kappa)$ is the thermal Prandtl number, $Pr_m = \mu/(\rho_d \eta)$ is the magnetic Prandtl number at the bottom of the layer, $\beta = c_s^2/V_A^2 = \mathcal{R} \Delta T \rho_d \mu_o / B^2$ is an estimate of the ratio between the sound speed and the Alfvén speed, and $m = (gd)/(\mathcal{R} \Delta T) - 1$ is the polytropic index of the layer. Finally, we set $\Lambda = (gd^3)/\kappa^2$. The background polytropic solution reads

$$\begin{aligned} T_s(z) &= z_o + z, \\ \rho_s(z) &= \left(\frac{z_o + z}{z_o + 1} \right)^m, \\ P_s(z) &= \frac{\Lambda}{m + 1} \rho_s T_s, \end{aligned} \tag{1}$$

with $z_o = T_o/\Delta T$. Note that $1/z_o$ is a measure of the stratification of the layer for fixed m .

As is usual in linear stability we consider 2D infinitesimal disturbances $W(z)$ (vertical velocity), $U(z)$ (horizontal velocity), $\theta(z)$, $\rho(z)$, $b_z(z)$ with a prescribed